Hellenic Mathematical Society
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
Διεύθυνση: Προξένου Κορομηλά 51
Τ.Κ. 54622 Θεσσαλονίκη
Τηλ: 2310 285377 Fax: 2310 285377
e-mail: emethes@otenet.gr
http://www.emethes.gr

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ

ΣΤ΄ ΤΑΞΗΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Σάββατο 28 Μαΐου 2011

ΠΡΟΒΛΗΜΑ $1^{ο}$

Έχουμε εννέα μεταλλικές μπάλες που ζυγίζουν διαδοχικά 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, και 9 κιλά. **Να τις τοποθετήσετε σε τρία ίδια κουτιά με τέτοιον τρόπο ώστε κάθε κουτί να έχει το ίδιο βάρος και κάθε μπάλα να έχει μπει σε κάποιο κουτί**. Αν υπάρχει και δεύτερος τρόπος για να γίνει αυτό, να τον περιγράψετε.

ΛΥΣΗ:

Το άθροισμα όλων των βαρών από το 1 έως και το 9 είναι 45 κιλά.

Άρα το κάθε κουτί πρέπει να έχει βάρος 45 : 3 = 15 κιλά.

Το πρόβλημα λοιπόν είναι να τοποθετήσουμε τις εννέα μπάλες σε τρία κουτιά και το κάθε κουτί να ζυγίζει 15 κιλά.

Ας ξεκινήσουμε με τη μπάλα 1 κιλό (κι αυτή πρέπει να μπει σε ένα κουτί). Αυτό θα ταιριάζει με τη μπάλα 5 κιλά και τη μπάλα 9 κιλά, ή θα ταιριάζει με τη μπάλα 6 κιλά και τη μπάλα 8 κιλά. Δεν υπάρχουν άλλες περιπτώσεις.

Άρα, ένα κουτί θα είναι του τύπο (1, 5, 9) ή (1, 6, 8).

Με το ίδιο σκεπτικό για την μπάλα 2 κιλά, θα πρέπει να μπει στα εξής κουτιά: (2, 4, 9) ή (2, 5, 8) ή (2, 6, 7).

Με το ίδιο σκεπτικό για την μπάλα 3 κιλά, θα πρέπει να μπει στα εξής κουτιά, προσέχοντας που έχουν μπει οι μπάλες 1 κιλό και 2 κιλά. Για την μπάλα αυτή υπάρχουν τα εξής κουτιά: ((3, 4, 8) ή (3, 5, 7).

Για την μπάλα 4 κιλά υπάρχει η περίπτωση (4, 5, 6), αλλά οι μπάλες 1, 2, 3, 7, 8 και 9 κιλά που μένουν απέξω δεν έχουν τρόπο να μπουν σε δύο κουτιά.
Άρα, θα ασχοληθούμε με τις περιπτώσεις που σε κάθε ένα κουτί θα υπάρχει αντίστοιχα η μπάλα 1 κιλό, μπάλα 2 κιλά και μπάλα 3 κιλά.
Οι τριάδες κουτιών είναι οι εξής:
(1, 5, 9) (2, 6, 7) (3, 4, 8)
(1, 6, 8) (2, 4, 9) (3, 5, 7).

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Μπορεί κάποιος να βάλει διαφορετικό αριθμό από μπάλες σε κάθε κουτί, (πάλι όμως πρέπει το συνολικό βάρος να είναι 15 κιλά). Τότε όμως έχουμε περισσότερες από δύο λύσεις, τις οποίες πρέπει να δεχτούμε ως σωστές. Τέτοιες λύσεις είναι οι περιπτώσεις:
(7, 8) (1, 5, 9) (2, 3, 4, 6) ή
(7, 8) (6, 9) (1, 2, 3, 4, 5) ή
(7, 8) (4, 5, 6) (1, 2, 3, 9) ή
(7, 8) (2, 4, 9) (1, 3, 5, 6) ή
(6, 9) (2, 5, 8) (1, 3, 4, 7) ή
(6, 9) (3, 4, 8) (1, 2, 5, 7) ή
(6, 9) (3, 5, 7) (1, 2, 4, 8) ή
(6, 9) (1, 5, 9) (2, 3, 4, 7) κλπ.
Αν γράψουμε δύο λύσεις από αυτές έχουμε απαντήσει στο πρόβλημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2^{o}

Στον πλανήτη RAM η πρόσθεση αριθμών δεν γίνεται με τον τρόπο που κάνουν οι κάτοικοι της Γης. Οι κάτοικοι του RAM όταν προσθέτουν δύο αριθμούς βρίσκουν το μισό άθροισμα των γήινων. Όταν προσθέτουν τρεις αριθμούς βρίσκουν το ένα τρίτο του αθροίσματος των γήινων, όταν προσθέτουν τέσσερεις αριθμούς βρίσκουν το ένα τέταρτο του αθροίσματος των γήινων. Ανάλογα κάνουν για πέντε αριθμούς κλπ. Το σύμβολο της πρόσθεσης των RAM είναι το *****. Για παράδειγμα, 3*7 = 5 1*2*3 = 2.
α) **Να κάνετε κι εσείς τις πράξεις**: (2*3)*(2,5*0), (2*4)*3, 1/4 * 1/3.
β) **Να βρείτε τους αριθμούς C και W** όταν: 2*C*5*C = 13 2*W*3 = 7.

ΛΥΣΗ:

α)

(2*3)*(2,5*0) = $\left(\frac{2+3}{2}\right)*\left(\frac{2,5+0}{2}\right)=2,5*1,25=\frac{2,5+1,25}{2}=\frac{3,75}{2}=1,875$.

(2*4)*3 = $\left(\frac{2+4}{2}\right)*3=3*3=\frac{3+3}{2}=3$

1/4 * 1/3 = $\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{2}=\frac{\frac{3}{12}+\frac{4}{12}}{2}=\frac{\frac{7}{12}}{2}=\frac{7}{24}$

β)

2*C*5*C = 13   άρα $\frac{2+C+5+C}{4}=13$ δηλαδή C + C + 7 = 52, C + C = 45,

Άρα είναι C = 45/2 .

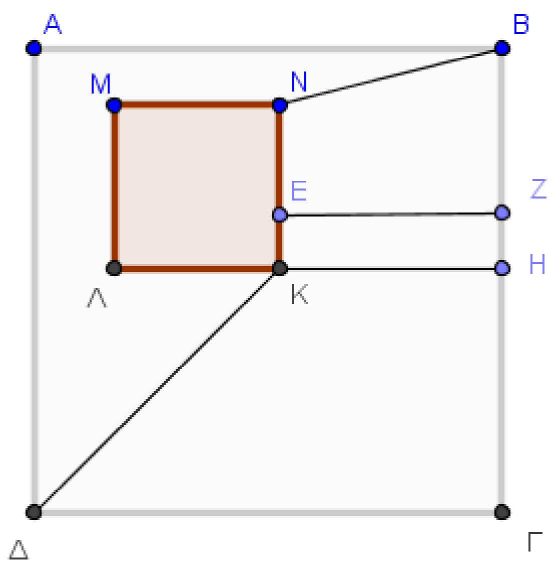
2*W*3 = 7, άρα $\frac{2+W+3}{3}=7$, άρα W + 5 = 21, Άρα, W = 21 – 5 = 16.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3^o

Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 8 μ. Το Κ είναι το κέντρο του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Το ΕΖΗΚ είναι ορθογώνιο με πλευρά ΕΚ 1 μ.

Το ΜΝΚΛ είναι τετράγωνο με πλευρά 3 μ. **Να βρεθούν**:

1) Το εμβαδόν του ΕΖΗΚ
2) Το εμβαδόν του τραπεζίου ΔΚΗΓ.
3) Το εμβαδόν του τραπεζίου ΝΒΖΕ.



<u>ΛΥΣΗ:</u>

1) Η απόσταση του κέντρου Κ από το Η είναι ίση με τη μισή πλευρά του τετραγώνου, δηλαδή ΚΗ = 4 μ. Επειδή ΕΚ = 1 μ. έχουμε ότι εμβαδόν του ορθογωνίου ΕΖΗΚ = 1·4 τμ = 4 τ.μ.
2) Έχουμε ΔΓ = 8 μ. και ΔΗ = 4 μ. το ύψος ΗΓ = 4 μ. άρα το εμβαδόν του τραπεζίου ΔΚΗΓ είναι $\frac{(8+4)\cdot 4}{2}=\frac{12\cdot 4}{2}=6\cdot 4=24$ τ.μ.
3) Αφού ΚΝ = 3 μ. και ΚΕ = 1 μ. σημαίνει ότι ΝΕ = 3 – 1 = 2 μ. Αφού ΗΒ = 4 μ. και ΗΖ = 1 μ. σημαίνει ότι ΖΒ = 4 – 1 = 3μ. Επίσης, έχουμε ΕΖ = 4 μ. Άρα το εμβαδόν του τραπεζίου ΝΒΖΗ είναι: $\frac{(3+2)\cdot 4}{2}=\frac{5\cdot 4}{2}=10$ τ.μ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4^{ο}

Το 60% ενός αριθμού είναι ίσο με το 20% ενός άλλου αριθμού. Αν προσθέσουμε τους δύο αρχικούς αριθμούς, θα πάρουμε τον αριθμό 480.
Να βρείτε ποιοι είναι οι αριθμοί αυτοί.

<u>ΛΥΣΗ:</u>

Από την πληροφορία «60% ενός αριθμού είναι ίσο με το 20% ενός άλλου αριθμού» πρέπει να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι ο ένας αριθμός είναι τριπλάσιος του άλλου. Αυτό μπορούμε να το εξηγήσουμε με διάφορους τρόπους

Α) Με τη χρήση του βοηθητικού ποσού. Έστω ότι ο μικρότερος αριθμός είναι ο 100, τότε το 60% του είναι το 60. Αφού το 60 είναι το 20% του μεγάλου αριθμού, ο μεγάλος αριθμός είναι ο $60\cdot\frac{100}{20}$= 300. Αν λοιπόν ο ένας αριθμός είναι ο 100 ο άλλος θα είναι ο 300. Αυτό σημαίνει ότι ο μεγάλος είναι τριπλάσιος του μικρότερου.

Β) Με εξίσωση. Αν ο μικρός αριθμός είναι ο μ, τότε το 60% του μ είναι ο 0,6μ. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός 0,6μ είναι το 20% ενός άλλου μεγαλύτερου αριθμού του 0,6μ$\cdot\frac{100}{20}$= 3μ. Άρα ο μεγάλος αριθμός είναι ο 3μ που είναι τριπλάσιος του μ.

Γ) Με αναλογίες ποσών και ισότητα κλασμάτων. Ονομάζουμε τον μικρό αριθμό x και y τον μεγάλο αριθμό, τότε από ανάλογα ποσά έχουμε $\frac{100}{x}=\frac{60}{a}$ και $\frac{y}{100}=\frac{a}{20}$.

Πολλαπλασιάζουμε τις αναλογίες και έχουμε:

$\frac{100}{x}\cdot\frac{y}{100}=\frac{60}{a}\cdot\frac{a}{20}$, άρα $\frac{y}{x}=3$, άρα y = 3x. Πάλι ο ένας αριθμός είναι τριπλάσιος του άλλου.

Αφού εξηγήσαμε για ποιον λόγο ο ένας αριθμός είναι τριπλάσιος του άλλου, τώρα η λύση είναι εύκολη. Χωρίζουμε τον αριθμός 480 σε 4 ίσα μερίδια, 480 : 4 = 120. Άρα ο μικρός αριθμός είναι ο 120 και ο μεγάλος ο 480 – 120 = 360.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5^{o}

Έχουμε πέντε όμοιες μπάλες τις A, A, A, B, B. Οι μπάλες τύπου A έχουν το ίδιο βάρος. Οι μπάλες τύπου B έχουν ίδιο βάρος μεταξύ τους, αλλά ζυγίζουν λίγο περισσότερο από τις μπάλες τύπου A. Μας έχουν δώσει μία ζυγαριά με δύο δίσκους με την οποία δεν βρίσκουμε ακριβώς το βάρος των αντικειμένων, αλλά μπορούμε να συγκρίνουμε σε ποιον δίσκο είναι το βαρύτερο ή τα βαρύτερα αντικείμενα.
Να περιγράψετε με ποιον τρόπο θα βρούμε μία από τις δύο μπάλες τύπου B, κάνοντας όσο γίνεται λιγότερα ζυγίσματα. Ζύγισμα θεωρούμε τη διαδικασία να βάλουμε ταυτόχρονα μπάλες και στους δύο δίσκους.

ΛΥΣΗ:

Τοποθετούμε δύο μπάλες σε κάθε δίσκο. Υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:
AB και AB.
AA και AB.
AA και BB.

1. Η περίπτωση ΑΒ και ΑΒ είναι η μόνη που δίνει ισορροπία στη ζυγαριά. Αυτό σημαίνει ότι έμεινε έξω μία μπάλα Α. Παίρνουμε τη μπάλα αυτή, τη βάζουμε σε έναν δίσκο και αφαιρούμε μία άλλη μπάλα. Στον δίσκο αυτό θα έχουμε τις περιπτώσεις ΑΑ ή ΑΒ. Αν είναι ΑΑ, τότε ο άλλος δίσκος είναι βαρύτερος και έτσι καταλαβαίνουμε ότι αφαιρέσαμε μία μπάλα Β. δηλαδή είναι αυτό είναι που ζητάμε. Αν είναι ΑΒ, τότε θα έχουμε ισορροπία, καταλαβαίνουμε ότι αλλάξαμε μία μπάλα Α με μπάλα Α, άρα η άλλη μπάλα στον δίσκο είναι μπάλα Β. Αυτό είναι που ζητάμε.
2. Στις περιπτώσεις (ΑΑ και ΑΒ) , (ΑΑ, ΒΒ) δεν γνωρίζουμε αν η μπάλα που έμεινε έξω είναι τύπου Α ή Β. Το σίγουρο είναι ότι στον ελαφρότερο δίσκο υπάρχουν δύο μπάλες ΑΑ. Τώρα πρέπει με τον μικρότερο αριθμό ζυγισμάτων να βρούμε μία μπάλα Β, ανάμεσα σε τρεις μπάλες Α, Β, Β (δύο είναι πάνω στο βαρύτερο δίσκο και μία έξω). Θα αποδείξουμε ότι ένα ζύγισμα αρκεί για το πετύχουμε.

   Βγάζουμε τις μπάλες από τους δίσκους, παίρνουμε τυχαία δύο από τις μπάλες Α, Β, Β και βάζουμε από μία στον κάθε δίσκο. Αν έχουμε ισορροπία, αυτό σημαίνει ότι και οι δύο μπάλες είναι Β, Β. Οπότε πετύχαμε το σκοπό μας. Αν δεν έχουμε ισορροπία, η βαρύτερη μπάλα είναι Β, οπότε πάλι πετύχαμε το σκοπό μας.

   Τελικά, σε όλες τις περιπτώσεις με 2 το πολύ ζυγίσματα μπορούμε να βρούμε μία μπάλα τύπου Β.