ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ, ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ, 28 ΜΑΙΟΥ 2012

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι *σ υ ν ε χ ή ς* σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2)-f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$.

Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$, οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

Α 2. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta) \ .$$

Α3. Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Α4 .

α) **Σ**	β) **Σ**	γ) **Λ**	δ) **Λ**	ε) **Λ**

ΘΕΜΑ Β

Β1.

1ος τρόπος Είναι $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4$ θέτουμε $z = x + yi$ $x,y \in R$.

$$|x+yi-1|^2 + |x+yi+1|^2 = 4 \Leftrightarrow |(x-1)+yi|^2 + |(x+1)+yi|^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 + y^2 + (x+1)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + x^2 + 2x + 1 + y^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + 2y^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$.

2ος τρόπος

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \Leftrightarrow (z-1)(\overline{z}-1) + (z+1)(\overline{z}+1) = 4 \Leftrightarrow$$

$$z\overline{z} - z - \overline{z} + 1 + z\overline{z} + z + \overline{z} + 1 = 4 \Leftrightarrow 2z\overline{z} = 2|z|^2 = 2 \Leftrightarrow |z| = 1$$

3ος τρόπος

Αν A(1,0) B(-1,0), M(x,y) οι αποστάσεις (AB)=2 , (MA)= $|z-1|$, (MB)= $|z+1|$,

Δηλαδη $AB^2 = MA^2 + MB^2$. Αυτό σημαίνει ότι ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα, άρα γωνία $AMB = 90^o$, δηλαδή το M ανήκει σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και διάμετρο AB = 2.

B2.

<u>1^{ος} τρόπος</u> .

Είναι $|z_1|=1$ και $|z_2|=1$ άρα έχουμε

$$|z_1-z_2|=\sqrt{2}=4 \Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=2 \Leftrightarrow (z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)=2 \Leftrightarrow$$

$$z_1\overline{z}_1-z_1\overline{z}_2-z_2\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2=2 \Leftrightarrow |z_1|^2+|z_2|^2-z_1\overline{z}_2-z_2\overline{z}_1=2 \Leftrightarrow z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1=0$$

Οπότε

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)=z_1\overline{z}_1+z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1=1+1+0=2$$

Άρα $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$

<u>2^{ος} τρόπος</u> .

Αν αποδείξουμε την ταυτότητα $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$ (άσκηση στο σχολικό βιβλίο) θέτοντας όπου $|z_1|=1$, $|z_2|=1$ και $|z_1-z_2|=\sqrt{2}$ βρίσκουμε ότι $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$.

<u>3^{ος} τρόπος</u>

Αν $M_1(z_1)$ $M_2(z_2)$ τοτε $(OM_1)=(OM_2)=1$ και $(M_1M_2)=\sqrt{2}$, άρα το τρίγωνο OM_1M_2 είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Αν $\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{ON}$ τότε το OM_1NM_2 είναι τετράγωνο και $(ON)=|z_1+z_2|=\sqrt{2}$.

B3.

Θέτουμε όπου $w = x + yi$, τότε από τη δεδομένη σχέση έχουμε τις ισοδυναμίες

$$|w-5\overline{w}|=12 \Leftrightarrow |w-5\overline{w}|^2=12^2 \Leftrightarrow |x+yi-5(x-yi)|^2=12^2 \Leftrightarrow$$

$$|-4x+6yi|^2=12^2 \Leftrightarrow 16x^2+36y^2=12^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Συνεπώς, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w στο επίπεδο είναι έλλειψη με $\alpha = 3$ και $\beta = 2$.

Έστω M(w) η εικόνα του w, τότε ισχύει $\beta \le (OM) \le \alpha \Leftrightarrow 2 \le |w| \le 3$.

Επομένως η μέγιστη τιμή του $|w|$ είναι 3 και η ελάχιστη τιμή 2.

B4.

<u>1^{ος} τρόπος</u> .

$$|z-w| \le |z|+|w|=1+|w| \le 1+3=4 \text{ , γιατί } |w| \le 3$$

$$|z-w| \ge ||z|-|w||=|1-|w|| \ge |w|-1 \ge 2-1=1 \text{ , γιατί } |w| \ge 2$$

Άρα $1 \le |z-w| \le 4$

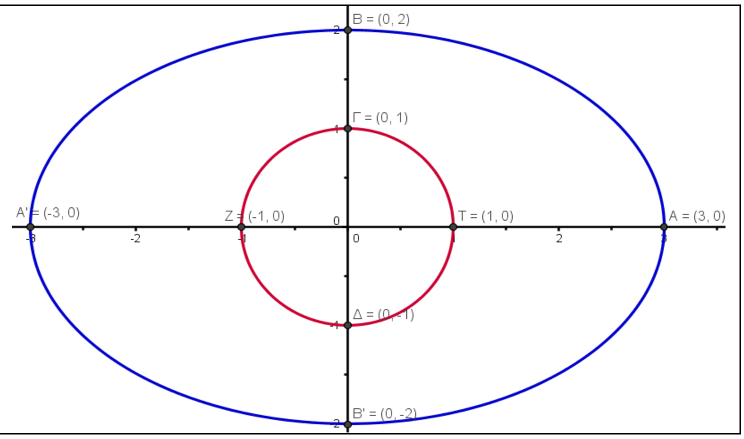
<u>2^{ος} τρόπος</u> .

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ (με σχήμα)

Ο τρόπος είναι δεκτός, επειδή και το σχολικό βιβλίο, (εφαρμογή σελ. 99-100) προτείνει αντίστοιχη λύση στον υπολογισμό αποστάσεων.

max $|z - w| = (OA) + R = 3 + 1 = 4$

min $|z - w| = (OB) - R = 2 - 1 = 1$



ΘΕΜΑ Γ

Γ 1.

$f(x)=(x-1)\ln x-1, \quad x>0$

1ος τρόπος

Η f είναι παραγωγίσιμη με: $f'(x)=\left((x-1)\ln x-1\right)'=\ln x+\dfrac{x-1}{x}, \quad x>0$

Για $0<x<1$ είναι $\ln x<0$ και $\dfrac{x-1}{x}<0$, άρα $f'(x)<0$.

Άρα f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(0,1]$.

Για $x>1$ είναι $\ln x>0$ και $\dfrac{x-1}{x}>0$ άρα $f'(x)>0$,

f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[1,+\infty)$

ο πίνακας μονοτονίας της f είναι:

x	0 1 $+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$
$f(x)$	↘ Τ.Ε. ↗

2ος τρόπος

$f'(x)=\ln x+\dfrac{x-1}{x}, \quad x>0$ με $f''(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}>0, \quad x>0$. Άρα f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και $f'(1)=0$. Για κάθε $x>1$ έχουμε $f'(x)>f'(1)=0$ και για κάθε $0<x<1$ έχουμε $f'(x)<f'(1)=0$

3ος τρόπος

Με τη χρήση του ορισμού της μονοτονίας.

Αν $0<x_1<x_2<1 \Leftrightarrow x_1-1<x_2-1<0$ *και* $\ln x_1<\ln x_2<0 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$

άρα f είναι γνησίως αύξουσα.

Αν $1<x_1<x_2 \Leftrightarrow 0<x_1-1<x_2-1$ *και* $0<\ln x_1<\ln x_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

άρα f είναι γνησίως αύξουσα.

- η f είναι συνεχής στο $\Delta_1=(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα άρα

  $f(\Delta_1)=\left[f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right)=[-1, \ +\infty)$ επειδη $f(1)=-1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

- η f είναι συνεχής στο $\Delta_2=[1,+\infty)$ και είναι γνησίως αύξουσα άρα

  $f(\Delta_2)=\left[f(1), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right)=[-1, \ +\infty)$ γιατί $f(1)=-1$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

Όποτε το σύνολο τιμών της f είναι $f(A)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[-1, \ +\infty)$

Γ2.

Απο την εξίσωση έχουμε

$x^{x-1}=e^{2013} \Leftrightarrow \ln x^{x-1}=\ln e^{2013} \Leftrightarrow (x-1)\ln x=2013 \Leftrightarrow (x-1)\ln x-1=2012 \Leftrightarrow f(x)=2012$

- Το $2012\in f(\Delta_1)$ η f είναι 1-1 ως γνησίως φθίνουσα ,άρα έχει μια ακριβώς ρίζα στο $\Delta_1=(0,1]$
- Το $2012\in f(\Delta_2)$ η f είναι 1-1 ως γνησίως αύξουσα, άρα έχει μια ακριβώς ρίζα στο $\Delta_2=[1,+\infty)$

Άρα η εξίσωση έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες $x_1\in\Delta_1$ και $x_2\in\Delta_2$.

Γ 3.

1ος τρόπος (Θ. Bolzano)

Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x)=f'(x)+f(x)-2012,\quad x\in[x_1,x_2]$.

Η φ συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Επίσης, ισχύει

$\varphi(x_1)=f'(x_1)+f(x_1)-2012=f'(x_1)<0$ γιατί $f(x_1)=2012$ και $f'(x_1)<0$

$\varphi(x_2)=f'(x_2)+f(x_2)-2012=f'(x_2)>0$ γιατί $f(x_2)=2012$ και $f'(x_2)>0$

Οπότε $\varphi(x_1)\cdot\varphi(x_2)<0$.

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε

$\varphi(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)+f(x_0)-2012=0\Leftrightarrow f'(x_0)+f(x_0)=2012$.

2ος τρόπος (με το θεώρημα Rolle)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^x\left(f(x)-2012\right),\quad x\in[x_1,x_2]$.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

Η h είναι παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με $h'(x)=e^x\left(f(x)+f'(x)-2012\right)$

$h(x_1)=e^{x_1}\left(f(x_1)-2012\right)=0$ και $h(x_2)=e^{x_2}\left(f(x_2)-2012\right)=0$.

Συνεπώς, ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, άρα υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε

$h'(x_0)=0\Leftrightarrow e^{x_0}\left(f'(x_0)+f(x_0)-2012\right)=0\Leftrightarrow f'(x_0)+f(x_0)=2012$

Γ 4.

Έχουμε την συνεχή συνάρτηση $g(x)=f(x)+1=(x-1)\ln x,\quad x>0$

Ισχύει $g(x)=0\Leftrightarrow(x-1)\ln x=0\Leftrightarrow x=1$ και $g(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[1,e]$

άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=\int_1^e g(x)\cdot dx=\int_1^e (x-1)\ln x\cdot dx=\int_1^e \frac{(x-1)^2}{2}\ln x\cdot dx=$$

$$\left[\frac{(x-1)^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{(x-1)^2}{2}\frac{1}{x}\cdot dx=\frac{(e-1)^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e \frac{x^2-2x+1}{x}\cdot dx=$$

$$\frac{(e-1)^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e x-2+\frac{1}{x}dx=\frac{(e-1)^2}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-2x+\ln x\right]_1^e=$$

$$\frac{(e-1)^2}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}-2e+1-\frac{1}{2}+2\right)=\frac{e^2-3}{4}\quad \tau.\mu.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1

Έχουμε $\displaystyle\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt\ge\frac{x^2-x}{e}\Leftrightarrow\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt-\frac{x^2-x}{e}\ge 0,\forall x>0.$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\displaystyle\Phi(x)=\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt-\frac{x^2-x}{e},x>0.$

♦ Η συνάρτηση f είναι συνεχής, άρα η συνάρτηση $\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞)

καθώς και η συνάρτηση $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων.

♦ Η Φ είναι παραγωγίσιμη για x > 0, ως διαφορά παραγωγίσιμων με

$$\Phi'(x) = f\left(x^2 - x + 1\right)\cdot\left(2x - 1\right) - \frac{1}{e}\left(1 - 2x\right).$$

♦ Είναι $\Phi(x) \geq 0 = \Phi(1)$, $\forall x > 0$.

Δηλαδή η συνάρτηση Φ στο εσωτερικό σημείο $x_0=1$ του Δ=(0, +∞) παρουσιάζει ελάχιστο και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, άρα από το Θ. Fermat είναι $\Phi'(1) = 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow f(1) = -e^{-1}$.

♦ Η f είναι συνεχής στο Δ = (0, +∞) και $f(x) \neq 0$ $\forall x > 0$ άρα διατηρεί πρόσημο στο Δ = (0, +∞) και επειδή $f(1) = -e^{-1} < 0$ έχουμε ότι $f(x) < 0, \forall x > 0$, άρα $|f(x)| = -f(x)$, x > 0.

Επομένως $\ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)f(x)$, (1)

<u>1ος τρόπος</u>

$f(x) = \dfrac{\ln x - x}{\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e}$, $x > 0$ $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e \neq 0$ από (1) επειδή είναι $\ln x - x < 0$,

επειδή $\ln x \leq x - 1$, $\forall x > 0$, (εφαρμογή βιβλίου)

Η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων στο (0, +∞).

♦ Είναι $\ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)f(x) \overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\ln x - x}{f(x)} = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right), x > 0$ (2).

Παραγωγίζουμε τα μέλη της (2) και έχουμε:

$$\left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)' = \frac{\ln x - x}{f(x)} \Leftrightarrow \frac{\ln x - x}{f(x)} = c\cdot e^x, c \in \Re.$$

Αφού $f(1) = -e^{-1}$, προκύπτει ότι $\frac{\ln 1 - 1}{f(1)} = c\cdot e \Leftrightarrow c = 1$.

Άρα $\frac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^{-x}\left(\ln x - x\right), x > 0.$

<u>2ος τρόπος</u>

Αφού $f(x) \neq 0$, από την (1) προκύπτει ότι $\frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e$. Αν θέσουμε $k(x) = \frac{\ln x - x}{f(x)}$,

προκύπτει $k(x) = \int_1^x k(t)dt + e$. Η k είναι συνεχής για x > 0, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, άρα η

συνάρτηση $\int_1^x k(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση. Επομένως, η k παραγωγίζεται με $k'(x) = k(x)$.

Από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου προκύπτει ότι $k(x) = c \cdot e^x \Leftrightarrow \dfrac{\ln x - x}{f(x)} = c \cdot e^x, c \in \Re$.

Αφού $f(1) = -e^{-1}$, προκύπτει ότι $\dfrac{\ln 1 - 1}{f(1)} = c \cdot e \Leftrightarrow c = 1$.

Άρα $\dfrac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^{-x}(\ln x - x), x > 0$.

Τέλος μπορούμε τώρα να διαπιστώσουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη, ως γινόμενο παραγωγίσιμων.

Δ2.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x - x}{e^x} = -\infty$.

Στο L= $\lim\limits_{x\to 0^+}\left((f(x))^2 ημ\dfrac{1}{f(x)} - f(x)\right)$, θέτουμε $\dfrac{1}{f(x)} = u$, τότε $u \to 0$.

Άρα $L = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{ημu}{u^2} - \dfrac{1}{u}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{ημu - u}{u^2} \underset{DLH}{\overset{0/0}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{συνu - 1}{2u} \underset{DLH}{\overset{0/0}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-ημu}{2} = 0$.

Δ3.

Είναι $F'(x) = f(x), x > 0$ και $F''(x) = f'(x) = ... = e^{-x}\left(-\ln x + x - 1 + \dfrac{1}{x}\right) > 0, x > 0$,

αφού lnx – x + 1 ≤ 0 και $\dfrac{1}{x} > 0$. Άρα η F είναι κυρτή στο (0, +∞). Αφού x > 0, είναι x < 2x < 3x.

Για την ανισότητα F(x) + F(3x) > 2F(2x), x > 0 εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ.
για την συνάρτηση F στα διαστήματα [x, 2x] και [2x,3x].
Η F είναι συνεχείς στο [x, 2x] και [2x,3x]

Η F είναι παραγωγίσιμες στο (x, 2x) και (2x,3x)

Συνεπώς από Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχουν $ξ_1 \in (x, 2x)$ και $ξ_2 \in (2x,3x)$ τέτοια ώστε

$F'(\xi_1) = \dfrac{F(2x) - F(x)}{2x - x} = \dfrac{F(2x) - F(x)}{x}$ και $F'(\xi_2) = \dfrac{F(3x) - F(2x)}{3x - 2x} = \dfrac{F(3x) - F(2x)}{x}$

Είναι F κυρτή στο (0. +∞) άρα F΄ γνησίως αύξουσα στο (0, + ∞) και $ξ_1 < 2x < ξ_2$,

Επομένως για κάθε x > 0 $F'(\xi_1) < F'(\xi_2) \Leftrightarrow \dfrac{F(2x) - F(x)}{x} < \dfrac{F(3x) - F(2x)}{x} \Leftrightarrow$

$F(2x) - F(x) < F(3x) - F(2x) \Leftrightarrow F(x) + F(3x) > 2F(2x)$

Δ4.

Θεωρούμε τη συνάρτηση H με τύπο H(x)= F(β) + F(3β) – 2 F(x), x∈[β, 2β], β > 0.

H H είναι συνεχής στο [β, 2β]

και H(β) = F(3β) - F(β) < 0, γιατί β < 3β και F γνησίως φθίνουσα, αφού $F'(x) = f(x) < 0$.

H(2β) = F(β) + F(3β) – 2 F(2β) > 0 λόγω του $Δ_3$.

Δηλαδή H(β)·H(2β) < 0, άρα από το Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ∈(β, 2β)

το οποίο είναι και μοναδικό γιατί $H'(x) > 0$ (δηλαδή H γν. αύξουσα) τέτοιο ώστε H(ξ)=0.