ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$

Μονάδες 10

Α2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο R. Πότε η ευθεία y=λx+β λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο +∞;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0=1$

β) Μια συνάρτηση $f:A\to R$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

γ) Για κάθε $x \in R_1 = R - \{x/\text{συν}x=0\}$ ισχύει: $(\text{εφ}x)' = -\dfrac{1}{\text{συν}^2 x}$

δ) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{ημ}x}{x} = 1$

ε) Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία (απόδειξη), σελίδα 260 σχολικού βιβλίου (Θεώρημα Fermat)

Α2. Θεωρία (Ορισμός), σελίδα 280 σχολικού βιβλίου.

Α3. α) (Σ), β(Σ), γ) (Λ), δ) (Λ), ε) (Σ)

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με z≠3i, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z-3i|+|\bar{z}+3i|=2 \text{ και } w=z-3i+\frac{1}{z-3i}.$$

Β1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι $\bar{z}-3i=\frac{1}{z-3i}$

Β3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2\le w\le 2$

Μονάδες 8

Β4. Να αποδείξετε ότι: $|z-w|=|z|$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Β.1 $|z-3i|+|\bar{z}+3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|+|\overline{z-3i}|=2 \overset{|\overline{z-3i}|=|z-3i|}{\Leftrightarrow} 2|z-3i|=2 \Leftrightarrow \boxed{|z-3i|=1}$ οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z είναι κύκλος με κέντρο $K(0,3)$ (την εικόνα του $3i$) και ακτίνα $\varrho=1$

Β.2. Από τη σχέση

$$|z-3i|=1 \Leftrightarrow |z-3i|^2=1 \Leftrightarrow (z-3i)\left(\overline{z-3i}\right)=1 \Leftrightarrow (z-3i)\left(\bar{z}+3i\right)=1 \overset{z\ne 3i \Leftrightarrow z-3i\ne 0}{\Leftrightarrow} \boxed{\bar{z}+3i=\frac{1}{z-3i}}:(1)$$

Β.3 . Είναι $w=z-3i+\dfrac{1}{z-3i} \overset{(1)}{\Rightarrow} w=z-3i+\bar{z}+3i \Rightarrow w=z+\bar{z} \overset{z=x+yi}{\Rightarrow} \boxed{w=2x}$

Επειδή όμως ο z κινείται στον κύκλο του Β.1 ερωτήματος θα ισχύει:

$$x^2+\left(y-3\right)^2=1 \overset{(y-3)^2\ge 0}{\Rightarrow} x^2\le 1 \Rightarrow \sqrt{x^2}\le 1 \Rightarrow |x|\le 1 \Rightarrow -1\le x\le 1 \overset{\cdot 2}{\Rightarrow} -2\le 2x\le 2 \overset{w=2x}{\Rightarrow} \boxed{-2\le w\le 2}$$

Β.4. Είναι :

$$z=x+i\cdot y \overset{w=2x}{\Rightarrow} z-w=x+i\cdot y-2x \Rightarrow z-w=-x+i\cdot y \Rightarrow$$

$$z-w=-\left(x-i\cdot y\right) \Rightarrow z-w=-\bar{z} \Rightarrow |z-w|=|-\bar{z}| \overset{|-\bar{z}|=|z|}{\Rightarrow} \boxed{|z-w|=|z|}$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με $f'(0)=f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x) \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\ln\left(e^x-x\right),\ x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 8

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 3

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln\left(e^x-x\right)=\sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε:

$$e^x\cdot\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)\Rightarrow\left(e^xf'(x)-e^x\right)'=\left(xf'(x)\right)'\Rightarrow\boxed{e^xf'(x)-e^x=xf'(x)+c}:(1)$$

Για $x=0\overset{(1)}{\Rightarrow}e^0f'(0)-e^0=0f(0)+c\overset{f'(0)=f(0)=0}{\Rightarrow}c=-1$ οπότε ισχύει:

$$e^xf'(x)-e^x=xf'(x)-1\Rightarrow e^xf'(x)-xf'(x)=e^x-1\Rightarrow\boxed{f'(x)\cdot\left(e^x-x\right)=e^x-1}:(2)$$

Θα δείξω ότι $e^x-x>0$ για κάθε πραγματική τιμή του x. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^x-x$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R με $h'(x)=\left(e^x-x\right)'=e^x-1$ και $h'(x)=0\Leftrightarrow e^x-1=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$

Για $x>0\overset{e^t\uparrow}{\Rightarrow}e^x>e^0\Rightarrow e^x>1\Rightarrow e^x-1>0\Rightarrow h'(x)>0$ και ομοίως $x<0\overset{e^t\uparrow}{\Rightarrow}e^x<e^0\Rightarrow e^x<1\Rightarrow e^x-1<0\Rightarrow h'(x)<0$ οπότε η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$ το $h(0)=e^0-0=1>0$ άρα από την (2) θα έχουμε:

$$f'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\left(e^x-x\right)'}{e^x-x}\overset{e^x-x>0}{\Rightarrow}f'(x)=\left(\ln\left(e^x-x\right)\right)'\Rightarrow f(x)=\ln\left(e^x-x\right)+c_1:(3)$$

Για $x=0\overset{(3)}{\Rightarrow}f(0)=\ln\left(e^0-0\right)+c_1\overset{f(0)=0}{\Rightarrow}0=\ln1+c_1\Rightarrow0=0+c_1\Rightarrow c_1=0\overset{(3)}{\Rightarrow}\boxed{f(x)=\ln\left(e^x-x\right)}$

Γ2. Είναι $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$ με $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{e^x-1}{e^x-x}=0\overset{e^x-x>0}{\Leftrightarrow}e^x-1=0\Leftrightarrow x=0$

Θα είναι για $x>0\overset{e^t\uparrow}{\Rightarrow}e^x>e^0\Rightarrow e^x>1\Rightarrow e^x-1>0\overset{e^x-x>0}{\Rightarrow}\dfrac{e^x-1}{e^x-x}>0\Rightarrow f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)\subset\mathbb{R}$ η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Επίσης για $x<0\overset{e^t\uparrow}{\Rightarrow}e^x<e^0\Rightarrow e^x<1\Rightarrow e^x-1<0\overset{e^x-x>0,\forall x\in\mathbb{R}}{\Rightarrow}\dfrac{e^x-1}{e^x-x}<0\Rightarrow f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0]\subset\mathbb{R}$ η f θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $\boxed{\min f=f(0)=\ln\left(e^0-0\right)=0}$

Γ3. Είναι

$$f''(x)=\left(\frac{e^x-1}{e^x-x}\right)'=\left(\frac{e^x-x+x-1}{e^x-x}\right)'=\left(1+\frac{x-1}{e^x-x}\right)'=\frac{e^x-x-(x-1)\left(e^x-1\right)}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{e^x-x-xe^x+x+e^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}$$

$$\Rightarrow\boxed{f''(x)=\frac{2e^x-xe^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=2e^x-xe^x-1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R (πράξεις με παραγωγίσιμες) με $g'(x)=\left(2e^x-xe^x-1\right)'=2e^x-e^x-xe^x=e^x-xe^x\Rightarrow\ldots\boxed{g'(x)=e^x(1-x)}$

Με $g'(x)=0\Leftrightarrow e^x(1-x)=0\overset{e^x\neq0}{\Leftrightarrow}1-x=0\Leftrightarrow\boxed{x=1}$

Για $x<1\Rightarrow1-x>0\overset{e^x>0}{\Rightarrow}e^x(1-x)>0\Rightarrow g'(x)>0\overset{g(\text{συν.στο.}(-\infty,1])}{\Rightarrow}g$ γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$ και για $x>1\Rightarrow1-x<0\overset{e^x>0}{\Rightarrow}e^x(1-x)<0\Rightarrow g'(x)<0\overset{g(\text{συν.στο.}[1,+\infty)}{\Rightarrow}g$ γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

Οπότε η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 1 το $g(1)=2e-e-1=e-1>0$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^x-xe^x-1\right)\overset{\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x\overset{(-\infty)\cdot0}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\underset{\text{Del'Hosp}}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x)'}{\left(e^{-x}\right)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^x\right)=0}{=}0-0-1=-1$

Και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^x-xe^x-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x(2-x)-\frac{1}{e^x}\right]\overset{\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}(2-x)=-\infty}{=}(+\infty)\cdot(-\infty)-0=-\infty$

Έτσι για την g ισχύει: $g([1,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}g(x),g(1)\right]=(-\infty,e-1]\ni 0\Rightarrow$ υπάρχει $x_1\in[1,+\infty)$ ώστε $g(x_1)=0$ το οποίο είναι και μοναδικό λόγω της μονοτονίας της g στο $[1,+\infty)$ και

για $x>x_1\geq 1\overset{g\downarrow\sigma\tau o\,[1,+\infty)}{\Rightarrow}g(x)>g(x_1)\overset{g(x_1)=0}{\Rightarrow}g(x)>0\overset{(e^x-x)^2>0}{\Rightarrow}f''(x)>0$ και για

$1\leq x<x_1\overset{g\downarrow\sigma\tau o\,[1,+\infty)}{\Rightarrow}g(x)<g(x_1)\overset{g(x_1)=0}{\Rightarrow}g(x)<0\overset{(e^x-x)^2>0}{\Rightarrow}f''(x)<0$

Οπότε η f παρουσιάζει ένα μόνο σημείο καμπής το $M_1(x_1,f(x_1))$ στο διάστημα $[1,+\infty)$

Ομοίως για την g ισχύει: $g((-\infty,1])=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}g(x),g(1)\right]=(-1,e-1]\ni 0\Rightarrow$ υπάρχει $x_2\in(-\infty,1]$ ώστε $g(x_2)=0$ το οποίο είναι και μοναδικό λόγω της μονοτονίας της g στο $(-\infty,1]$ και για $1\geq x>x_2\overset{g\uparrow\sigma\tau o\,(-\infty,1]}{\Rightarrow}g(x)>g(x_2)\overset{g(x_2)=0}{\Rightarrow}g(x)>0\overset{(e^x-x)^2>0}{\Rightarrow}f''(x)>0$ και για

$x<x_2\leq 1\overset{g\uparrow\sigma\tau o\,(-\infty,1]}{\Rightarrow}g(x)<g(x_2)\overset{g(x_2)=0}{\Rightarrow}g(x)<0\overset{(e^x-x)^2>0}{\Rightarrow}f''(x)<0$

Οπότε η f παρουσιάζει ένα μόνο σημείο καμπής το $M_2(x_2,f(x_2))$ στο διάστημα $(-\infty,1]$

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x)=f(x)-\sigma\upsilon\nu x$ η οποία είναι

Συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και $k(0)=f(0)-\sigma\upsilon\nu 0=0-1=-1$ και

$k\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-0=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln\left(e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\right)>0$ διότι $\min\left(e^x-x\right)=1$ όπως δείξαμε για $x=0$ οπότε για $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}>1\Rightarrow\ln\left(e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\right)>0$ οπότε από το θεώρημα του Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ώστε $k(x_0)=0$. Επειδή προφανώς η k είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ (διαφορά παραγωγισίμων) με

$k'(x)=f'(x)+\eta\mu x\overset{f'(x)>0,\forall x\in(0,+\infty)\supset\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ \eta\mu x>0\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Rightarrow}k'(x)>0\Rightarrow$ η συνάρτηση k είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και άρα το $x_0:k(x_0)=0\Leftrightarrow\ldots\boxed{\ln\left(e^{x_0}-x_0\right)=\sigma\upsilon\nu x_0}$ είναι μοναδικό

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f,g : R→R, οι οποίες για κάθε x∈R ικανοποιούν τις σχέσεις:

i) f(x)>0 και g(x)>0

ii) $\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$

iii) $\frac{1-g(x)}{e^{2x}}=\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{f(x+t)}dt$

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο R και ότι f(x)=g(x) για κάθε x∈R. **Μονάδες 9**

Δ2. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = e^x$, x∈R. **Μονάδες 4**

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$ **Μονάδες 5**

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x)=\int_1^x f\left(t^2\right)dt$ τους άξονες x΄x και y΄y και την ευθεία με εξίσωση x=1.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. Είναι

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt \overset{\substack{u=x+t\Rightarrow du=dt,t=u-x\\ t=0\Rightarrow u=x,t=-x\Rightarrow u=0}}{\Rightarrow} \frac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_x^0\frac{e^{2(u-x)}}{g(u)}du=\int_x^0\frac{e^{2u}\cdot e^{-2x}}{g(u)}du=e^{-2x}\int_x^0\frac{e^{2u}}{g(u)}du\Rightarrow$$

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=e^{-2x}\int_x^0\frac{e^{2u}}{g(u)}du\Rightarrow 1-f(x)=e^{2x}\cdot e^{-2x}\int_x^0\frac{e^{2u}}{g(u)}du \overset{e^{2x}\cdot e^{-2x}=e^0=1}{\Rightarrow} 1-f(x)=\int_x^0\frac{e^{2u}}{g(u)}du\Rightarrow$$

$$f(x)=1-\int_x^0\frac{e^{2u}}{g(u)}du\Rightarrow \boxed{f(x)=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du}$$

Ομοίως λόγω συμμετρικής σχέσης βρίσκουμε: $\boxed{g(x)=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du}$ Επειδή η g είναι

συνεχής στο R θα είναι και $\frac{e^{2u}}{g(u)}$ συνεχής στο R (πηλίκο συνεχών) και επειδή $0\in R$

θα είναι η $\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}du$ παραγωγίσιμη στο R οπότε και η $f(x)=1+\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}du$ παραγωγίσιμη

με $f'(x)=\left(1+\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}du\right)' \Rightarrow \boxed{f'(x)=\frac{e^{2x}}{g(x)}}:(1)$.

Για τον ίδιο λόγο (λόγω συμμετρικών σχέσεων) βρίσκουμε ότι και η g είναι

παραγωγίσιμη στο R με $g'(x)=\left(1+\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}du\right)' \Rightarrow \boxed{g'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)}}:(2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$f'(x)g(x)=f(x)'g(x)=e^{2x} \Rightarrow f'(x)g(x)-f(x)'g(x)=0 \overset{g(x)>0}{\Rightarrow} \frac{f'(x)g(x)-f(x)'g(x)}{[g(x)]^2}=0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}=c \overset{\left(f(0)=1+\int_0^0 \frac{e^{2u}}{g(u)}du=1,g(0)=1+\int_0^0 \frac{e^{2u}}{g(u)}du=1\right)\Rightarrow c=1}{\Rightarrow} \boxed{f(x)=g(x)}$$

Δ2. Με $g(x)=f(x)$ θα έχουμε:

$$f'(x)\cdot f(x)=e^{2x} \Rightarrow 2f'(x)\cdot f(x)=2e^{2x} \Rightarrow (f^2(x))'=(e^{2x})' \Rightarrow f^2(x)=e^{2x}+c_1 \overset{f(0)=e^0=1\Rightarrow c_1=0}{\Rightarrow} f^2(x)=e^{2x}$$

$$\overset{f(x)>0}{\Rightarrow} \boxed{f(x)=e^x}, x\in R$$

Δ3.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}} \overset{u=\frac{1}{x}\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} u=-\infty, x=\frac{1}{u}}{=} \lim_{u\to-\infty}\frac{\frac{1}{u}}{e^u}=\lim_{u\to-\infty}\frac{1}{ue^u} \overset{\lim_{u\to-\infty}(ue^u)=\lim_{u\to-\infty}\frac{u}{e^{-u}} \overset{DeL'Hsop}{=} \lim_{u\to-\infty}\frac{1}{-e^{-u}}=0, ue^u<0}{\Rightarrow}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=-\infty}$$

Δ4. Επειδή $f(t^2)=e^{2t}>0$ για $x\in[0,1]$ θα είναι $F(x)\le 0$ οπότε το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι:

$$E=\int_0^1 |F(x)|dx=-\int_0^1 F(x)dx=-\int_0^1\left(\int_1^x f(t^2)dt\right)dx=-\int_0^1\left((x)'\int_1^x f(t^2)dt\right)dx=$$

$$-\left[x\int_1^x f(t^2)dt\right]_0^1-\left[-\int_0^1\left(x\left(\int_1^x f(t^2)dt\right)'\right)dx\right]=-1\cdot\int_1^1 f(t^2)dt+0\cdot\int_1^0 f(t^2)dt+\int_0^1 (xf(x^2))dx$$

$$\overset{\int_1^1 f(t^2)dt=0,\ 0\cdot\int_1^0 f(t^2)dt=0}{=} \int_0^1 (xf(x^2))dx=\int_0^1 x\cdot e^{x^2}dx=\ldots\left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1=\frac{e}{2}-\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{E=\frac{e-1}{2}\text{τ.μ}}$$