ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 19 ΜΑΪΟΥ 2010
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$
είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή
$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 6

Απάντηση.

- Οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$
είναι παράγουσες της f στο Δ αφού $\forall x \in \Delta$ είναι:

$$G'(x) = \left(F(x) + c\right)' = F'(x) + 0 = f(x)$$

- Έστω G μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε $\forall x \in \Delta$ ισχύει: $G'(x) = f(x)$ και $F'(x) = f(x)$, οπότε $G'(x) = F'(x)\ \forall x \in \Delta$

Άρα σύμφωνα με γνωστή πρόταση: $G(x) = F(x) + c,\ \forall x \in \Delta$

Α2. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

Απάντηση. Αν τουλάχιστον ένα από τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$ τότε η ευθεία $x=x_0$ θα λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Α3. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

Μονάδες 5

Απάντηση. Λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών α+βi και γ+δi είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

β) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β), όπου $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$

δ) (συνx)΄=ημx, $x\in\mathbb{R}$

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0

Μονάδες 10

Απάντηση.

α) Σωστό,

β) Σωστό,

γ) Λάθος,

δ) Λάθος,

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $z+\dfrac{2}{z}=2$ όπου $z\in\mathbb{C}$ με $z\neq 0$

Β1. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης.

Μονάδες 7

Απάντηση. Η εξίσωση γίνεται ισοδύναμα $z^2-2z+2=0$.
Έχει διακρίνουσα $\Delta=-4$ και ρίζες $z_1=1+i$, $z_2=1-i$.

Β2. Να αποδείξετε ότι $z_1^{2010}+z_2^{2010}=0$

Μονάδες 6

Απάντηση. Είναι $z_1^2=(1+i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i$ και ομοίως $z_2^2=-2i$.
Άρα $z_1^{2010}+z_2^{2010}=(2i)^{1005}+(-2i)^{1005}=2^{1005}i^{1005}-2^{1005}i^{1005}=0$.

Β3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει $|w-4+3i|=|z_1-z_2|$ τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 7

Απάντηση. Είναι $|w-4+3i|=|1+i-1+i|\Leftrightarrow|w-4+3i|=|2i|=2\Leftrightarrow|w-(4-3i)|=2$.
Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w είναι κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(4,-3) και ακτίνα 2.

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **Β3**, να αποδείξετε ότι $3\leq|w|\leq 7$

Μονάδες 5

Απάντηση.

$$\big||w-4+3i|-|4-3i|\big|\leq|w-4+3i+4-3i|\leq|w-4+3i|+|4-3i|\Rightarrow$$

$$|2-5|\leq|w|\leq 2+5\Rightarrow 3\leq|w|\leq 7$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$, $x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

Μονάδες 5

Απάντηση.

Είναι

$$f'(x)=2+\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2x^2+2+2x}{x^2+1}>0,\quad \forall x\in\mathbb{R},$$

αφού το τριώνυμο $2x^2+2x+2$ έχει αρνητική διακρίνουσα και συντελεστή x^2 τον θετικό αριθμό 2.

Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$$

Μονάδες 7

Απάντηση.

Η δοσμένη εξίσωση γίνεται ισοδύναμα:

$$2x^2-2(3x-2)=\ln\left[(3x-2)^2+1\right]-\ln(x^4+1)\Leftrightarrow$$

$$\ln(x^4+1)+2x^2=\ln\left[(3x-2)^2+1\right]+2(3x-2)\Leftrightarrow$$

$$f(x^2)=f(3x-2)\Leftrightarrow x^2=3x-2$$

Η τελευταία ισοδυναμία ισχύει αφού η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα. Η εξίσωση $x^2-3x+2=0$ έχει ρίζες τις 1 και 2. Έτσι, οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 1, 2.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα ψ΄ψ.

Μονάδες 6

Απάντηση.

$f''(x)=\left(2+\frac{2x}{x^2+1}\right)'=0+\frac{2(x^2+1)-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2(1-x^2)}{\left(x^2+1\right)^2}$ Έτσι , για το πρόσημο της

$f''(x)$ ισχύει: $f''(x)>0 \Leftrightarrow 1-x^2>0 \Leftrightarrow x\in(-1,1)$

και $f''(x)<0 \Leftrightarrow 1-x^2<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup\left(1,+\infty\right)$.

Άρα η συνάρτηση είναι κυρτή στο $\left[-1,1\right]$ και κοίλη στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $\left[1,+\infty\right)$ Έχει σημεία καμπής τα $A(-1,f(-1))$ και $B(1,f(1))$.

Η εφαπτομένη ευθεία στο σημείο Α είναι η

$\varepsilon_1: y-f(-1)=f'(-1)(x+1)\Leftrightarrow y+2-\ln 2=x+1\Leftrightarrow y=x-1+\ln 2.$

Η εφαπτομένη ευθεία στο σημείο Α είναι η

$\varepsilon_2: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-2-\ln 2=3(x-1)\Leftrightarrow y=3x-1+\ln 2.$

Οι δύο ευθείες τέμνουν τον y΄y στο σημείο Γ(0, -1+ln2), το οποίο θα είναι και το σημείο τομής τους.

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} xf(x)dx$

Μονάδες 7

Απάντηση.

1ος τρόπος

$$\int_{-1}^{1} xf(x)dx = \int_{-1}^{1} 2x^2 + x\ln(x^2+1)dx =$$

$$\int_{-1}^{1} 2x^2 dx + \int_{-1}^{1} x\ln(x^2+1)dx = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \int_{2}^{2}\frac{1}{2}\ln u du = \frac{4}{3} + 0 = \frac{4}{3}$$

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα θέτουμε $x^2+1=u$ οπότε $du = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}du$ ενώ τα όρια ολοκλήρωσης είναι ίσα με 2.

2ος τρόπος

$$\int_{-1}^{1} xf(x)dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{x^2}{2}\right)' f(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}f(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{x^2}{2}f'(x)dx =$$

$$2 - \int_{-1}^{1}\frac{x^4+x^3+x^2}{x^2+1}dx = 2 - \int_{-1}^{1}\frac{x^4+x^3+x^2}{x^2+1}dx = 2 - \int_{-1}^{1}\left(x^2 + x - \frac{x}{x^2+1}\right)dx =$$

$$2 - \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{\ln(x^2+1)}{2}\right]_{-1}^{1} = ... = \frac{4}{3}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x)\neq x$$

$$f(x)-x=3+\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}\,dt$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x)=\frac{f(x)}{f(x)-x},\quad x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 5

Απάντηση.

Έχουμε $f(x)=x+3+\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt,\quad x\in\mathbb{R}$ Η συνάρτηση $\frac{t}{f(t)-t},\quad t\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων οπότε η $\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt,\ x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη.

Έτσι, η συνάρτηση $f(x)=x+3+\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt,\quad x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f'(x)=1+0+\frac{x}{f(x)-x}=\frac{f(x)}{f(x)-x},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\left(f(x)\right)^2-2xf(x)$, $x\in\mathbb{R}$, είναι σταθερή.

Μονάδες 7

Απάντηση.

Η συνάρτηση $g(x)=\left(f(x)\right)^2-2xf(x),\ x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$g'(x)=\left(\left(f(x)\right)^2\right)'-\left(2xf(x)\right)'=2f(x)f'(x)-2f(x)-2xf'(x)=$$

$$=2f'(x)\left(f(x)-x\right)-2f(x)=0,\ x\in\mathbb{R}$$

Για το τελευταίο = χρησιμοποιήσαμε την ισότητα του Δ1.

Άρα η συνάρτηση g είναι σταθερή.

Ακόμα είναι $g(0)=\left(f(0)\right)^2-2\cdot 0\cdot f(0)=3^2=9$ και έτσι $g(x)=9,\ \ x\in\mathbb{R}$

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+\sqrt{x^2+9},\ \ x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 6

Απάντηση.

Από το Δ2. έχουμε: $g(x)=\left(f(x)\right)^2-2xf(x)=9,\ x\in\mathbb{R}$ Άρα

$$\left(f(x)\right)^2-2xf(x)+x^2=x^2+9\Leftrightarrow\left(f(x)-x\right)^2=x^2+9\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|f(x)-x\right|=\sqrt{x^2+9},\ x\in\mathbb{R}$$

Είναι $f(x)-x\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x)-x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο και εφόσον $f(0)-0=3>0$ θα είναι $f(x)-x>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Άρα $f(x)-x=\sqrt{x^2+9},\ \ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+9},\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_{x}^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt,\ \ x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 7

Απάντηση.
1ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(u)=\int_{0}^{u} f(t)dt,\ \ u\in\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη

με $F'(u)=f(u),\ \ u\in\mathbb{R}$ και

$$F''(u)=f'(u)=1+\frac{u}{\sqrt{u^2+9}}=\frac{\sqrt{u^2+9}+u}{\sqrt{u^2+9}}>0,\ \ u\in\mathbb{R}\quad \text{(a)}$$

Έτσι η F' είναι γνησίως αύξουσα.

Από Θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $x_1\in(x,x+1)$ τέτοιο ώστε:

$$F'(x_1)=\frac{F(x+1)-F(x)}{x+1-x}=F(x+1)-F(x),\ \ x\in\mathbb{R}.\quad (1)$$

Ακόμα από Θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $x_2\in(x+1,x+2)$ τέτοιο ώστε:

$$F'(x_2)=\frac{F(x+2)-F(x+1)}{x+2-x-1}=F(x+2)-F(x+1),\ \ x\in\mathbb{R}.\quad (2)$$

Από (1),(2) και με τη βοήθεια της μονοτονίας της F' είναι:

$$x_1<x_2\Rightarrow F'(x_1)<F'(x_2)\Rightarrow F(x+1)-F(x)<F(x+2)-F(x+1)$$

Άρα $\int_{0}^{x+1} f(t)dt-\int_{0}^{x} f(t)dt<\int_{0}^{x+2} f(t)dt-\int_{0}^{x+1} f(t)dt \Leftrightarrow \int_{x}^{x+1} f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt,\ \ x\in\mathbb{R}$

(a)Αιτιολόγηση: $\sqrt{u^2+9}>\sqrt{u^2}=|u|>-u$.

Απάντηση.

2^{ος} τρόπος

$$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}}>0,\ x\in\mathbb{R}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(u)=\int_u^{u+1} f(t)dt=\int_0^{u+1} f(t)dt-\int_0^u f(t)dt,\quad u\in\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $F'(u)=f(u+1)-f(u)>0,\ \forall u\in\mathbb{R}$.

Άρα η F είναι γνησίως αύξουσα. Οπότε: $F(x)<F(x+1),\forall x\in\mathbb{R}$ ή

$$\int_x^{x+1} f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt,\quad x\in\mathbb{R}$$

3^{ος} τρόπος

$$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}}>0,\ x\in\mathbb{R}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

$f(t)<f(t+1),\forall t\in\mathbb{R}$ Άρα $\int_x^{x+1} f(t)dt<\int_x^{x+1} f(t+1)dt,\quad \forall x\in\mathbb{R}$ Όμως

$$\int_x^{x+1} f(t+1)dt\overset{t+1=u}{=}\int_{x+1}^{x+2} f(u)du=\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$$ Έτσι,

$$\int_x^{x+1} f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt,\quad x\in\mathbb{R}$$