ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΖΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 15 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2.

Να αποδείξετε ότι: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Μονάδες 5

Α.2. Αν $z_1 = \rho_1$ (συνθ_1 + iημθ_1) και $z_2 = \rho_2$ (συνθ_2 + iημθ_2) δυο μιγαδικοί αριθμοί σε τριγωνομετρική μορφή, να γράψετε τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα:

	Στήλη Α		**Στήλη Β**
α.	$\frac{z_1}{z_2}$	1.	$\rho_1\rho_2\left[\eta\mu\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\sigma\upsilon\nu\left(\theta_1+\theta_2\right)\right]$
		2.	$\rho_1^{\nu}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\nu\theta_1\right)+i\eta\mu\left(\nu\theta_1\right)\right]$
β.	$z_1 \cdot z_2$	3.	$\frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\eta\mu\left(\theta_1-\theta_2\right)\right]$
		4.	$\frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\theta_1-\theta_2\right)+i\eta\mu\left(\theta_1-\theta_2\right)\right]$
γ.	z_1^{ν}	5.	$\rho_1\rho_2\left[\sigma\upsilon\nu\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\eta\mu\left(\theta_1+\theta_2\right)\right]$
		6,	$\rho_1^{\nu}\left[\eta\mu\left(\nu\theta_1\right)-i\sigma\upsilon\nu\left(\nu\theta_1\right)\right]$

Μονάδες 7,5

B.1. *Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$z_1 = 2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} + i\eta\mu\frac{2\pi}{3}\right) \text{ και } z_2 = \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{3} + i\eta\mu\frac{5\pi}{3}$$

Τότε το πηλίκο $\frac{z_1}{z_2}$ είναι ίσο με:

Α: 2 Β: 2i Γ: -2 Δ: -2i Ε: 2(1- i)

Μονάδες4,5

B.2. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z = 1 + i. Να υπολογίσετε το z^{16}.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Θεωρούμε τον πίνακα Α διάστασης $(\kappa^2 - 2\kappa - 1) \times (\kappa + 2\lambda - 3)$ και τον πίνακα Β διάστασης $(\lambda + 1) \times (3\kappa - \kappa^2 + 2)$, όπου κ και λ θετικοί ακέραιοι.

α. Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα κ και λ, για να ορίζεται το γινόμενο Α · Β

Μονάδες 5

β. Να βρείτε τις τιμές των κ και λ και τις διαστάσεις των πινάκων Α και Β, για να ορίζονται τα γινόμενα Α ·Β και Β · Α

Μονάδες 10

Β. Δίνεται, ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Να αποδείξετε ότι:

α. $A^2 = -I$, όπου Ι ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας.

Μονάδες 4

β. $2A^{2004} + A^{2001} + A^{1999} = 2I$, όπου Ι ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - \alpha}$,

όπου α πραγματικός αριθμός.

α. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε η συνάρτηση f να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 4$.

Μονάδες 5

β. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ(1,0) να διέρχεται από το σημείο Α(-2,3).

Μονάδες 10

γ. Αν $\alpha > 2$, να δείξετε ότι υπάρχει αριθμός $x_0 \in (1,2)$ τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη x_0 να είναι παράλληλη προς τον άξονα x'x.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Σε ένα διαγωνισμό ενός Οργανισμού για την πρόσληψη προσωπικού, συγκεντρώθηκαν 1.000 γραπτά υποψήφιων. Κάθε γραπτό διορθώνεται από δυο διαφορετικούς βαθμολογητές. Κάθε βαθμολογητής διορθώνει 4 φακέλους των 25 γραπτών την ημέρα. Για τη διόρθωση κάθε γραπτού ο βαθμολογητής αμείβεται με 200 δραχμές. Τη διόρθωση συντονίζουν δυο επόπτες που αμείβονται με 4.000 δραχμές την ημέρα. Στο τέλος της διόρθωσης όλων των γραπτών, κάθε βαθμολογητής παίρνει επί πλέον ως επίδομα 10.000 δραχμές ανεξάρτητα από τον αριθμό των ημερών που απασχολήθηκε.

α. Να αποδείξετε ότι το κόστος Κ(x) σε χιλιάδες δραχμές για τη διόρθωση όλων των γραπτών, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$K(x) = 10\left(x + \frac{16}{x} + 40\right)$$

όπου x ο αριθμός των βαθμολογητών που απασχολούνται.

Μονάδες 13

β. Πόσοι πρέπει να είναι οι βαθμολογητές, ώστε το κόστος της διόρθωσης να είναι ελάχιστο;

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το ελάχιστο κόστος του β. ερωτήματος και τον αριθμό των ημερών που απασχολήθηκαν οι βαθμολογητές για τη διόρθωση των γραπτών.

Μονάδες 4