Δ΄ ΤΑΞΗ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω η συνάρτηση f(x) = εφx.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1 = \mathbb{R} - \{x \mid συνx = 0\}$ και ισχύει

$$f'(x) = \frac{1}{συν^2 x}.$$

Μονάδες 10

Β. *Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη **(Σ)**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **(Λ)**, αν αυτή είναι λανθασμένη.*

1. Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z = x + yi, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, δίνεται από τον τύπο $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση y = f(x), όταν f είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

3. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο $(α, x_0)$ και $f'(x) < 0$ στο $(x_0, β)$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

4. Ο συζυγής κάθε μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, είναι ο μιγαδικός $\bar{z} = -x + yi$.

5. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε ισχύει

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}\ ,\ \text{εφόσον}\ \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0\,.$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$.

α. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Μονάδες 8

γ. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < 5 \\ 10x - 25, & \text{αν } x \geq 5 \end{cases}$$

και το σημείο $x_0 = 5$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο $x_0 = 5$ και να βρείτε την $f'(5)$.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(5,\ f(5))$.

Μονάδες 4

δ. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί και $w = \dfrac{i(i+z)}{i-z}$ με $z \neq i$.

Να αποδείξετε ότι :

α. $w = \dfrac{2x}{x^2 + (y-1)^2} + \dfrac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + (y-1)^2} i$,

Μονάδες 8

β. αν ο w είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο κέντρου Ο(0 , 0) και ακτίνας $\varrho_1 = 1$ και

Μονάδες 8

γ. αν ο z είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο κέντρου Ο(0 , 0) και ακτίνας $\varrho_2 = 1$.

Μονάδες 9

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)</u>

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα <u>δεν θα τα αντιγράψετε</u> στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.

   <u>Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.</u>

   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **<u>στο τετράδιό σας σε όλα</u>** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ