ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 23 ΜΑΙΟΥ 2012 ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο R, να αποδείξετε ότι

$$\boldsymbol{(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)}\,,\ x\in\Re$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$. Έχουμε

$$F(x+h)-F(x)=(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))=(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x)),$$

και για $h\neq 0$, $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$.

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x).$

Άρα $\boldsymbol{(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)}$.

Α 2. Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας του ενδεχομένου Α

Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας $P(A)=\dfrac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}}=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}$.

Α3. Πως ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής Χ, αν $\bar{x}>0$ και πως, αν $\bar{x}<0$;

Ο συντελεστής μεταβολής ή **συντελεστής μεταβλητότητας** ,

αν $\bar{x}>0$, ορίζεται από το λόγο: $CV=\dfrac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}}=\dfrac{s}{\bar{x}}$,

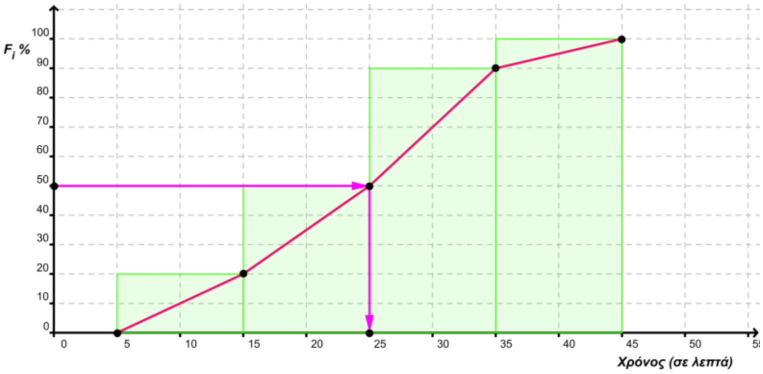
αν $\bar{x}<0$, τότε αντί της $\bar{x}$ χρησιμοποιούμε την $|\bar{x}|$,

Α4 .

α) **Λ**	β) **Σ**	γ) **Λ**	δ) **Σ**	ε) **Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β1.
Στο ιστόγραμμα $F_i\%$ σχεδιάζουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί της εκατό από το οποίο προκύπτει ότι $\delta = 25$ λεπτά



Β2.
<u>1^{ος} τρόπος</u> .
Επειδή η διάμεσος είναι $\delta = 25$ λεπτά, θα πρέπει οι μισές σε πλήθος παρατηρήσεις να είναι μικρότερες ή ίσες των 25 λεπτών και οι μισές σε πλήθος παρατηρήσεις να είναι μεγαλύτερες ή ίσες των 25 λεπτών.
Άρα $\nu_1 + \nu_2 = \nu_3 + \nu_4 \Leftrightarrow \alpha + 4 + 3\alpha - 6 = 2\alpha + 8 + \alpha - 2 \Leftrightarrow 4\alpha - 2 = 3\alpha + 6 \Leftrightarrow \alpha = 8$
<u>2^{ος} τρόπος</u> .
Με την βοήθεια του τύπου $F_i = \frac{N_i}{\nu}$ έχουμε $F_2 = \frac{N_2}{\nu} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{4\alpha - 2}{7\alpha + 4} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \alpha = 8$

Τότε, ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων είναι:

Χρόνοι (λεπτά)	x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$	$x_i\nu_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i$
$[5,15)$	10	12	20	12	20	120	– 14	196	2352
$[15,25)$	20	18	30	30	50	360	– 4	16	288
$[25,35)$	30	24	40	54	90	720	6	36	864
$[35,45)$	40	6	10	60	100	240	16	256	1536
Σύνολο		60	100			1440			5040

Β3. Από τον παραπάνω πίνακα, έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i}{\nu} = \frac{1440}{60} = 24 \text{ λεπτά.}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i}{\nu} = \frac{5040}{60} = 84 \text{, άρα } s = \sqrt{84} \text{, περίπου 9,17 λεπτά}$$

Β4. Επειδή δεχόμαστε ότι οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα στις κλάσεις, το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά θα είναι $\frac{45-37}{10} f_4\% = \frac{8}{10} 10\% = 8\%$

ΘΕΜΑ Γ

Αναφέρεται η έκφραση «επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή», επομένως ο δειγματικός χώρος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α: «ο μαθητής που μαθαίνει Γαλλικά» με πιθανότητα $P(\mathrm{A})=\dfrac{3\nu}{\nu^2+1}$

Β: «ο μαθητής που μαθαίνει Ισπανικά» με πιθανότητα $P(\mathrm{B})=\dfrac{\nu+2}{\nu^2+1}$

Το ενδεχόμενο «ο μαθητής που μαθαίνει και τις δύο γλώσσες» είναι το $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ με πιθανότητα $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\dfrac{\nu+1}{\nu^2+1}$.

Γ 1.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{x(x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2\left[\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-2^2\right]}{x(x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{2\left(x^2+3-4\right)}{x(x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{2\left(x^2-1\right)}{x(x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{2(x-1)(x+1)}{x(x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{2(x-1)}{x\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\frac{2\cdot(-1-1)}{-1\cdot\left(\sqrt{(-1)^2+3}+2\right)}=\frac{-4}{-4}=1$$

Επειδή το ενδεχόμενο «ο μαθητής που μαθαίνει μια τουλάχιστον από τις δύο γλώσσες» είναι το $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ και $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x}=1$. Άρα το $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ είναι βέβαιο ενδεχόμενο.

Γ 2. Από τον προσθετικό νόμο παίρνουμε : $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$

$$1=\frac{3\nu}{\nu^2+1}+\frac{\nu+2}{\nu^2+1}-\frac{\nu+1}{\nu^2+1}\Leftrightarrow 1=\frac{3\nu+\nu+2-\nu-1}{\nu^2+1}\Leftrightarrow 1=\frac{3\nu+1}{\nu^2+1}\Leftrightarrow$$

$$\nu^2+1=3\nu+1\Leftrightarrow \nu^2-3\nu=0\Leftrightarrow \nu\cdot(\nu-3)=0\Leftrightarrow \nu=0 \text{ ή } \nu=3$$

Επειδή $\nu\geq 3$, θα είναι **ν=3** (η λύση $\nu=0$ απορρίπτεται)

Γ 3. Για $\nu=3$, έχουμε: $P(\mathrm{A})=\dfrac{3\cdot 3}{3^2+1}=\dfrac{9}{10}$, $P(\mathrm{B})=\dfrac{3+2}{3^2+1}=\dfrac{5}{10}$ και $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\dfrac{3+1}{3^2+1}=\dfrac{4}{10}$

Το ενδεχόμενο «ο μαθητής που μαθαίνει μόνο μια από τις δύο γλώσσες» είναι το $(\mathrm{A}-\mathrm{B})\cup(\mathrm{B}-\mathrm{A})$.

Επειδή $(\mathrm{A}-\mathrm{B})\cap(\mathrm{B}-\mathrm{A})=\varnothing$ (τα ενδεχόμενα $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ και $\mathrm{B}-\mathrm{A}$ είναι ξένα μεταξύ τους),

σύμφωνα με τον προσθετικό νόμο των Πιθανοτήτων έχουμε:

$$P\big((\mathrm{A}-\mathrm{B})\cup(\mathrm{B}-\mathrm{A})\big)=P(\mathrm{A}-\mathrm{B})+P(\mathrm{B}-\mathrm{A})=P(\mathrm{A})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=$$

$$=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-2P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{9}{10}+\frac{5}{10}-2\cdot\frac{4}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

Γ 4. Επειδή ο δειγματικός χώρος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα θα χρησιμοποιήσουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας:

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{N(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{N(\Omega)}\Leftrightarrow\frac{4}{10}=\frac{32}{N(\Omega)}\Leftrightarrow 4N(\Omega)=320\Leftrightarrow N(\Omega)=80 .$$

Άρα ο δειγματικός μας χώρος αποτελείται από **80 μαθητές**.

ΘΕΜΑ Δ

<u>Δ 1.</u> Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1+\ell n^2 x}{x}$, $x>0$ είναι παραγωγίσιμη με:

$$f'(x)=\frac{\left(1+\ell n^2 x\right)'\cdot x-\left(1+\ell n^2 x\right)\cdot(x)'}{x^2}=\frac{2\ell nx\cdot\frac{1}{x}\cdot x-\left(1+\ell n^2 x\right)\cdot 1}{x^2}=-\frac{\ell n^2 x-2\ell nx+1}{x^2}=$$

$$=-\left(\frac{\ell nx-1}{x}\right)^2\leq 0 \text{ για κάθε } x>0.$$

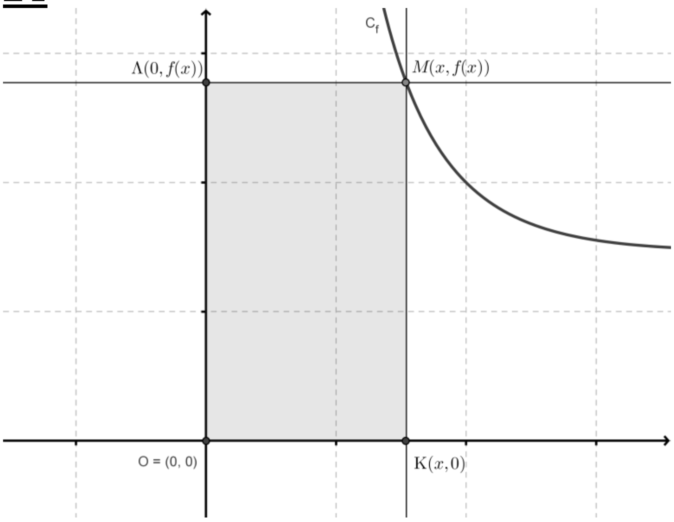
$$f'(x)=0\Leftrightarrow-\left(\frac{\ell nx-1}{x}\right)^2=0\Leftrightarrow \ell nx-1=0\Leftrightarrow \ell nx=1\Leftrightarrow x=e$$

Ο πίνακας μονοτονίας της f είναι:

x	0 e $+\infty$
$f'(x)$	– 0 –
$f(x)$	↘ ↘

Επομένως, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

<u>Δ 2</u>



<u>Το σχήμα δεν είναι απαραίτητο</u>

$(\mathrm{OK})=|x|$ επειδή $x>0$, θα είναι $(\mathrm{OK})=x$

$(\mathrm{O\Lambda})=|f(x)|$ επειδή $f(x)=\dfrac{1+\ell n^2 x}{x}>0$

για κάθε $x>0$, θα είναι $(\mathrm{O\Lambda})=f(x)$.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΚΜΛ θα δίνεται από τη συνάρτηση:

$$\mathrm{E}(x)=(\mathrm{OK})\cdot(\mathrm{O\Lambda})=x\cdot f(x)=x\cdot\frac{1+\ell n^2 x}{x}=1+\ell n^2 x,\ x>0$$

Η συνάρτηση $\mathrm{E}(x)$ είναι παραγωγίσιμη με :

$$\mathrm{E}'(x)=\left(1+\ell n^2 x\right)'=2\ell nx\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\ell nx}{x},\ x>0$$

$$\mathrm{E}'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2\ell nx}{x}=0\Leftrightarrow \ell nx=0\Leftrightarrow \ell nx=\ell n1\Leftrightarrow x=1$$

$$\mathrm{E}'(x)>0\Leftrightarrow\frac{2\ell nx}{x}>0\Leftrightarrow \ell nx>0\Leftrightarrow \ell nx>\ell n1\Leftrightarrow x>1,\qquad \mathrm{E}'(x)<0\Leftrightarrow\frac{2\ell nx}{x}<0\Leftrightarrow x<1$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο πίνακας μονοτονίας της E είναι:

x	$-\infty$ $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$E'(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
$E(x)$	$\searrow$ Τ.Ε. $\nearrow$

Επομένως, η E είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Επιπλέον το εμβαδόν του ορθογώνιου ΟΚΜΛ γίνεται (ολικό) ελάχιστο αν $x=1$.

Αν x = 1 τότε και $f(1)=\dfrac{1+\ell n^2 1}{1}=1$ δηλαδή (ΟΚ) = (ΟΛ) = 1

Τότε όμως το ορθογώνιο ΟΚΜΛ είναι τετράγωνο.

<u>Δ 3.</u>

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της $\Sigma(1, f(1))$.

Έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(1)=-\left(\dfrac{\ell n1-1}{x}\right)^2=-1$ δηλαδή είναι $\lambda=f'(1)=-1$, επειδή η εφαπτομένη είναι παράλληλη με την (ε) άρα $y=-x+\beta$. Τα σημεία $\mathrm{M}_i(x_i, y_i)$ ανήκουν στην $y=-x+\beta$, άρα: $y_i=-x_i+\beta$, $i=1,2,...,10$

Σύμφωνα με την εφαρμογή 3, σελίδα 99 του σχολικού βιβλίου, οι τεταγμένες y_i των σημείων M_i θα έχουν: Μέση τιμή: $\bar{y}=-1\cdot\bar{x}+\beta=-1\cdot 10+\beta=-10+\beta$

Τυπική απόκλιση: $s_y=|-1|\cdot s_x=1\cdot 2=2$

Συντελεστή μεταβλητότητας: $CV_y=\dfrac{s_y}{|\bar{y}|}=\dfrac{2}{|-10+\beta|}$

Για να είναι το δείγμα των παρατηρήσεων y_i ομοιογενές, θα πρέπει:

$$CV_y\le 10\% \Leftrightarrow \frac{2}{|-10+\beta|}\le\frac{1}{10}\Leftrightarrow |-10+\beta|\ge 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ -10+\beta\le -20 \ \text{ ή } \ -10+\beta\ge 20 \ \Leftrightarrow\ \beta\le -10 \ \text{ ή } \ \beta\ge 30$$

<u>Δ 4.</u>

Επειδή $\mathrm{A}\ne\varnothing$ και $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\ne\varnothing$ θα είναι

$0<P(\mathrm{A})\le 1$ και $0<P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le 1$

Έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

$$\mathrm{A}\subseteq\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\Rightarrow P(\mathrm{A})\le P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\Rightarrow f(P(\mathrm{A}))\ge f(P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}))\quad (1)$$

$$\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\subseteq\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\Rightarrow P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\Rightarrow f(P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}))\ge f(P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}))\quad (2)$$

Με πρόσθεση των ανισοτήτων (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει:

$$f(P(\mathrm{A}))+f(P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}))\ge 2f(P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}))$$