14 ΜΑΙΟΥ 2011 ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

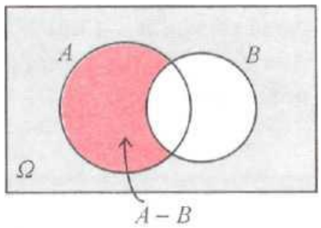
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B).$$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή τα ενδεχόμενα $A-B$ και $A\cap B$ είναι ασυμβίβαστα και $(A-B)\cup(A\cap B)=A$, έχουμε:

$$P(A)=P(A-B)+P(A\cap B).$$

Άρα $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$.

Α2. Δύο ενδεχόμενα *Α* και *Β* λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\varnothing$.

Α3. Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα v_i με το μέγεθος v του δείγματος, προκύπτει

η **σχετική συχνότητα** f_i της τιμής x_i, δηλαδή $f_i=\dfrac{\nu_i}{\nu}$, $i=1,2,...,\kappa$

Α4 .

α) **Λ**	β) **Λ**	γ) **Σ**	δ) **Λ**	ε) **Σ**

…………..…………………………………………………………………………………………

ΘΕΜΑ Β

α) **(α τρόπος)** Οι πιθανές τιμές για το Ν(Ω) είναι 64,65,67,68,69,70,71. Όμως το πλήθος των μαύρων σφαιρών είναι το $\dfrac{1}{4}$ του συνόλου. Όμως κανένας από τους αριθμούς 67,69,70,71 δε διαιρείται με το 4 συνεπώς Ν(Ω) = 68.

(β τρόπος) $\mathrm{P(M)}=\dfrac{\mathrm{N(M)}}{\mathrm{N(\Omega)}}$ άρα Ν(Ω) = 4Ν(Μ) . Γνωρίζω ότι 64 <Ν(Ω) <72 . Αντικαθιστώντας το Ν(Ω) και έχω 64 < 4Ν(Μ) < 72 .Διαιρώ με το 4 και έχω 16 < Ν(Μ) < 18. Το Ν(Μ) είναι φυσικός αριθμός , άρα Ν(Μ) = 17. οπότε Ν(Ω)=68 .

β) Ισχύει Ν(Α)+Ν(Κ)+Ν(Μ)=Ν(Ω) (1) άρα διαιρώντας με Ν(Ω) παίρνουμε

$\dfrac{\mathrm{N(A)}}{\mathrm{N(\Omega)}}+\dfrac{\mathrm{N(K)}}{\mathrm{N(\Omega)}}+\dfrac{\mathrm{N(M)}}{\mathrm{N(\Omega)}}=1$ απ' όπου $P(A)+P(K)+P(M)=1$ άρα απ' τα δεδομένα έχουμε

$$\frac{1}{4}+4\lambda^2-5\lambda+\frac{7}{4}=1\Leftrightarrow 4\lambda^2-5\lambda+1=0\ \Leftrightarrow \lambda=1 \text{ ή } \lambda=\frac{1}{4}$$

Αν $\lambda = 1$ τότε P(A) = 4, άτοπο διότι $0 \le P(A) \le 1$. Άρα $\boxed{\lambda = \frac{1}{4}}$.

γ) Για $\lambda = \frac{1}{4}$ παίρνουμε $P(\mathrm{A}) = \frac{1}{4}$ και $P(K) = \frac{1}{2}$

$$P(A) = \frac{N(\mathrm{A})}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \mathrm{N(A)} = P(\mathrm{A})\mathrm{N}(\Omega) \Leftrightarrow \mathrm{N(A)} = \frac{68}{4} \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathrm{N(A)} = 17}$$

$$P(\mathrm{M}) = \frac{N(\mathrm{M})}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \mathrm{N(M)} = P(\mathrm{M})\mathrm{N}(\Omega) \Leftrightarrow \mathrm{N(M)} = \frac{68}{4} \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathrm{N(M)} = 17}$$

$$P(\mathrm{K}) = \frac{N(\mathrm{K})}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \mathrm{N(K)} = P(\mathrm{K})\mathrm{N}(\Omega) \Leftrightarrow \mathrm{N(K)} = \frac{68}{2} \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathrm{N(K)} = 34}$$

δ) Επειδή τα ενδεχόμενα να πάρουμε άσπρη ή μαύρη είναι ασυμβίβαστα άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(A \cup M) = P(A) + P(M) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ άρα $\boxed{P(A \cup M) = \frac{1}{2}}$

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ :</u> Ο μαθητής μπορεί να υπολογίσει πρώτα την τιμή του $\lambda = \frac{1}{4}$ που ζητείται στο B_2 και μετά να υπολογίσει το N(Ω) = 68 του ερωτήματος B_1

……………………………………………………………………………………………………

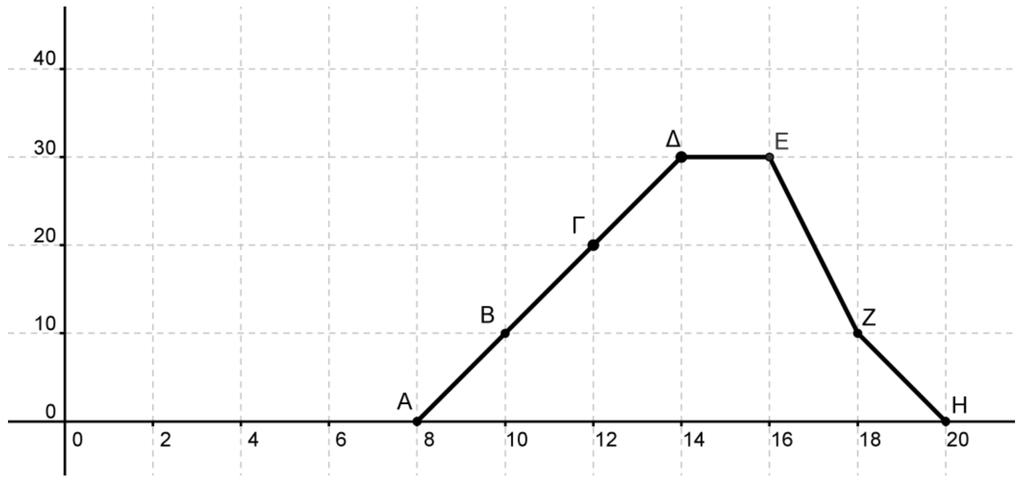
ΘΕΜΑ Γ

Γ1. (α. τρόπος) Αφού είναι y_Δ και y_E οι τεταγμένες των κορυφών Δ και Ε και είναι ΔΕ // xx΄ έχουμε ότι $y_\Delta = y_E$

επίσης $f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% + f_5\% = 100 \Leftrightarrow 10 + 20 + y_\Delta + y_E + 10 = 100$ άρα $\boxed{y_\Delta = y_E = 30}$

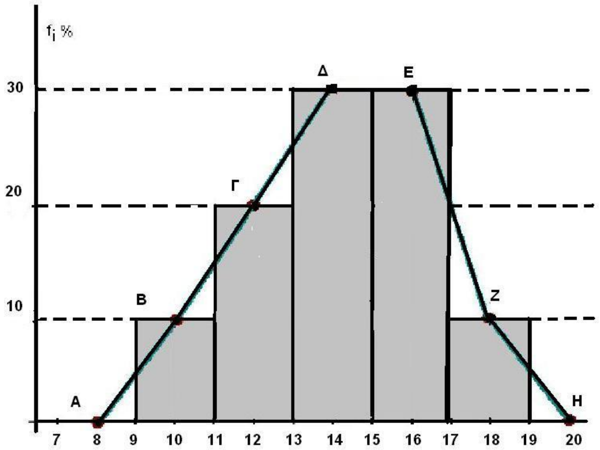
(β. τρόπος) $\bar{x} = \sum_{i=1}^{5} f_i x_i \Leftrightarrow 10 \cdot \frac{10}{100} + 12 \cdot \frac{20}{100} + 14 \cdot \frac{y_\Delta}{100} + 16 \cdot \frac{y_E}{100} + 18 \cdot \frac{10}{100} = 14,2$ και $y_\Delta = y_E$ έχουμε $\boxed{y_\Delta = y_E = 30}$

Γ2. **f i**



χιλιάδες ευρώ

Γ3.



Κλάσεις	**xi**	**fi%**
[9 – 11)	10	10
[11 – 13)	12	20
[13 – 15)	14	30
[15 – 17)	16	30
[17 – 19)	18	10
ΣΥΝΟΛΑ		100

Γ4. Το ποσοστό των πωλητών που θα λάβουν το εφάπαξ προσδιορίζεται από τις κλάσεις [15 - 17) και [17- 19) και είναι 30% + 10% = 40%

Γ5. Επειδή το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο των συχνοτήτων είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος έχουμε ότι ν = 80. Άρα ο αριθμός των πωλητών που δικαιούνται το εφάπαξ είναι 30%+10 % = 40% του 80 (άθροισμα συχνοτήτων δύο τελευταίων κλάσεων)

δηλαδή $\frac{30+10}{100}\cdot 80=\frac{40}{100}\cdot 80=32$ πωλητές

………………………………………………………………………………………………………

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο R με

$$f'(x)=\left(e^{\frac{1}{3}x^3-\frac{11}{30}x^2+\frac{2}{15}x}\right)'=e^{\frac{1}{3}x^3-\frac{11}{30}x^2+\frac{2}{15}x}\cdot\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{11}{30}x^2+\frac{2}{15}x\right)'=e^{\frac{1}{3}x^3-\frac{11}{30}x^2+\frac{2}{15}x}\cdot\left(x^2-\frac{11}{15}x+\frac{2}{15}\right).$$

Είναι: $e^{\frac{1}{3}x^3-\frac{11}{30}x^2+\frac{2}{15}x}>0$, για κάθε $x\in R$.

Το τριώνυμο $x^2-\frac{11}{15}x+\frac{2}{15}$ έχει ρίζες $x_1=\frac{1}{3},\ x_2=\frac{2}{5}$

Οπότε το πρόσημο της $f'(x)$ και η μονοτονία της $f(x)$ δίνονται στον πίνακα:

x	$-\infty$ $\qquad \frac{1}{3}$ $\qquad \frac{2}{5}$ $\qquad +\infty$
$f'(x)$	+ 0 – 0 +
$f(x)$	↗ Τ.Μ. ↘ Τ.Ε. ↗

Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$ και στο $\left[\frac{2}{5},+\infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{5}\right]$.

Δ2. Αφού $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$, οπότε είναι $(A)=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{2}{5}$

Οπότε $P(A\cap B)=P(A)=\frac{1}{3}$ άρα $\boxed{P(A\cap B)=\frac{1}{3}}$

Επειδή $A-B=A\cap B'=\varnothing$ άρα $\boxed{P(A-B)=0}$, $P(A\cup B)=P(B)=\frac{2}{5}$ άρα $\boxed{P(A\cup B)=\frac{2}{5}}$

$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$ άρα $\boxed{P(B-A)=\frac{1}{15}}$

Δ3.

α) $f(x)=h(x) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}=e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3}\right)} \Leftrightarrow x=0$ ή $\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3}\right)$

$$\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2-\frac{11}{30}x+\frac{2}{15}=\frac{3}{10}x^2-\frac{1}{5}x-\frac{1}{15}$$

$$\Leftrightarrow 10x^2-11x+4=9x^2-6x-2 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \boxed{x=2 \text{ ή } x=3}$$

β) Είναι $x_1=0,\ x_2=2,\ x_3=3$, οπότε: $\nu_1=2\cdot 0+1=1,\ \nu_2=2\cdot 2+1=5,\ \nu_3=2\cdot 3+1=7$

Είναι: $\bar{x}=\frac{x_1\cdot\nu_1+x_2\cdot\nu_2+x_3\cdot\nu_3}{\nu_1+\nu_2+\nu_3}=\frac{0\cdot 1+2\cdot 5+3\cdot 7}{13}=\frac{31}{13}$ άρα $\boxed{\bar{x}=\frac{31}{13}}$

a_atmatzidis