

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 17 ΜΑΪΟΥ 2010
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω t_1, t_2, \dots, t_n οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , που έχουν μέση τιμή \bar{x} . Σχηματίζουμε τις διαφορές $t_1 - \bar{x}, t_2 - \bar{x}, \dots, t_n - \bar{x}$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με μηδέν.

Μονάδες 7

Απάντηση.

Ο αριθμητικός μέσος των διαφορών $t_1 - \bar{x}, t_2 - \bar{x}, \dots, t_n - \bar{x}$ είναι:

$$\frac{t_1 - \bar{x} + t_2 - \bar{x} + \dots + t_n - \bar{x}}{n} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n - n\bar{x}}{n} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n} - \frac{n\bar{x}}{n} = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

A2. Αν x_1, x_2, \dots, x_n είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n και w_1, w_2, \dots, w_n είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε το σταθμικό μέσο της μεταβλητής X .

Μονάδες 4

Απάντηση.

Ο σταθμικός μέσος των παρατηρήσεων x_1, x_2, \dots, x_n μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n με w_1, w_2, \dots, w_n είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) είναι ο αριθμός ο

οποίος βρίσκεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

A3. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Να δώσετε τους ορισμούς του βέβαιου ενδεχομένου και του αδύνατου ενδεχομένου.

Μονάδες 4

Απάντηση.

Ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης είναι ενδεχόμενο, το οποίο πραγματοποιείται πάντα, αφού όποιο και να είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα βρίσκεται στο Ω .

Ορίζουμε, έτσι, το Ω ως βέβαιο ενδεχόμενο.

Ως ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης δεχόμαστε και το κενό σύνολο \emptyset το οποίο είναι αδύνατο να πραγματοποιηθεί σε οποιαδήποτε εκτέλεση του πειράματος. Ορίζουμε, έτσι, το κενό σύνολο ως αδύνατο ενδεχόμενο.

Σχόλιο.

Τον παραπάνω ορισμό έπρεπε να γράψουν οι μαθητές, αφού αυτός αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο. Θα προτιμούσα τον απλούστερο:

Βέβαιο ορίζεται το ενδεχόμενο το οποίο πραγματοποιείται σε κάθε εκτέλεση του πειράματος και **αδύνατο** αυτό που δεν πραγματοποιείται ποτέ.

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν οι συναρτήσεις f , g έχουν στο x_0 όρια πραγματικών αριθμούς, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

β) Για κάθε $x > 0$ ισχύει $(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$

γ) Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x=f(t)$, τη χρονική στιγμή t_0 είναι $v(t_0)=f'(t_0)$

δ) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$

ε) Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις.

Μονάδες 10

Απάντηση.

α) Σωστό, **β)** Λάθος, **γ)** Σωστό, **δ)** Λάθος, **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1$, $x \in \mathbb{R}$

B1. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$

Μονάδες 10Απάντηση.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x^2 - x + 1} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(\sqrt{x^2 - x + 1} - 1)}{x - 1} = \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(\sqrt{x^2 - x + 1} - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 - x + 1 - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 - x)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \frac{2 \cdot 1}{(\sqrt{1^2 - 1 + 1} + 1)} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

B2. Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$

Μονάδες 10Απάντηση.

Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1$, $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = (2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1)' = 2(\sqrt{x^2 - x + 1})' - 0 = 2 \frac{(x^2 - x + 1)'}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$ είναι:

$$f'(0) = \frac{2 \cdot 0 - 1}{\sqrt{0^2 - 0 + 1}} = -1$$

B3. Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$

Μονάδες 5Απάντηση.

Αφού ο συντελεστής διεύθυνσης της παραπάνω εφαπτομένης είναι ίσος με -1 θα πρέπει η γωνία που σχηματίζει αυτή με τον άξονα $x'x$ να είναι ίση με 135° , αφού $\text{ef}135^\circ = -1$

ΘΕΜΑ Γ

Οι τιμές της απώλειας βάρους, σε κιλά, 160 ατόμων, τα οποία ακολούθησαν ένα πρόγραμμα αδυνατίσματος, έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα:

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ v_i
[0 - ...)	...	20
[... - ...)	6	40
[... - ...)	...	45
[... - ...)	...	30
[... - ...)	...	25
ΣΥΝΟΛΟ		160

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος c κάθε κλάσης είναι ίσο με 4

Μονάδες 6

Απάντηση.

Τα άκρα της δεύτερης κλάσης, η οποία έχει κέντρο το 6, είναι c και $2c$.

$$\text{Έτσι, } \frac{c+2c}{2} = 6 \Rightarrow 3c = 12 \Rightarrow c = 4$$

Γ2. Αφού μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα σωστά συμπληρωμένο, να υπολογίσετε τη μέση τιμή \bar{x} και την τυπική απόκλιση S

Μονάδες 8

Απάντηση.

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ v_i	$v_i x_i$	x_i^2	$v_i x_i^2$
[0 - 4)	2	20	40	4	80
[4 - 8)	6	40	240	36	1440
[8 - 12)	10	45	450	100	4500
[12 - 16)	14	30	420	196	5880
[16 - 20)	18	25	450	324	8100
ΣΥΝΟΛΟ		160	1600		20000

Από τον συμπληρωμένο πίνακα έχουμε ότι: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 v_i x_i}{n} = \frac{1600}{160} = 10$

και

$$s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right] = \frac{1}{160} \left[20000 - \frac{1600^2}{160} \right] = \frac{1}{160} \left[20000 - \frac{(160)^2 \cdot 10^2}{160} \right] =$$
$$= \frac{1}{160} [20000 - 16000] = \frac{4000}{160} = 25 \Leftrightarrow s = 5$$

Γ3. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

Απάντηση.

Το δείγμα δεν είναι ομοιογενές αφού ο συντελεστής μεταβολής του

είναι: $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5}{10} = 50\% > 10\%$

Γ4. Αν κάθε άτομο έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί, υπολογίστε την πιθανότητα του ενδεχομένου

να

A: « η απώλεια βάρους ενός ατόμου που επιλέχθηκε τυχαία να είναι από 7 μέχρι και 14 κιλά».

Μονάδες 6

Απάντηση.

Δεδομένου ότι δεχόμαστε ότι οι παρατηρήσεις σε κάθε κλάση είναι ομοιόμορφα κατανομημένες και στην κλάση [4 - 8) έχουμε 40 παρατηρήσεις τότε στο διάστημα [7 - 8) θα έχουμε x παρατηρήσεις

και θα πρέπει $\frac{x}{40} = \frac{8-7}{8-4} \Rightarrow x = 40 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow x = 10$.

Επίσης στο διάστημα [8 - 12) έχουμε 45 παρατηρήσεις και στο διάστημα [12 - 14] θα έχουμε τις μισές από αυτές που έχει το διάστημα [12 - 16), δηλαδή 15 παρατηρήσεις.

Άρα το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου A είναι $N(A) = 10 + 45 + 15 = 70$.

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος, έστω Ω , είναι όλα τα άτομα του δείγματος και έτσι: $N(\Omega) = 160$.

Η πιθανότητα του ενδεχομένου A θα είναι: $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{70}{160} = \frac{7}{16}$

Δίνεται ο τύπος $s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right]$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με αντίστοιχες πιθανότητες $P(A), P(B)$ και η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(x - P(A)) - \frac{1}{2}(x - P(A))^2 + P(B), \quad x > P(A)$$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 13

Απάντηση.

Είναι

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\ln(x - P(A)) - \frac{1}{2}(x - P(A))^2 + P(B) \right)' = \frac{1}{x - P(A)} - \frac{1}{2} \cdot 2(x - P(A)) + 0 = \\ &= \frac{1 - (x - P(A))^2}{x - P(A)} = \frac{(1 - x + P(A))(1 + x - P(A))}{x - P(A)}, \quad x > P(A) \end{aligned}$$

Εφόσον $x - P(A) > 0$ το πρόσημο της παραγώγου εξαρτάται μόνο από τον παράγοντα $1 - x + P(A)$. Έτσι, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1 + P(A)$,

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1 + P(A) \text{ και } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 + P(A).$$

Οπότε: Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα

$(P(A), 1 + P(A)]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1 + P(A), +\infty)$.

Έχει μέγιστη τιμή για $x = 1 + P(A)$

την

$$\begin{aligned} f(1 + P(A)) &= \ln(1 + P(A) - P(A)) - \frac{1}{2}(1 + P(A) - P(A))^2 + P(B) \\ &= P(B) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Δ2. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο

$x_o = \frac{5}{3}$ με τιμή $f(x_o) = 0$, να αποδείξετε ότι:

$$P(A) = \frac{2}{3} \text{ και } P(B) = \frac{1}{2}$$

Μονάδες 2

Απάντηση.

Σύμφωνα με το Δ1 θα πρέπει:

$$1 + P(A) = \frac{5}{3} \text{ και } P(B) - \frac{1}{2} = 0.$$

Άρα

$$P(A) = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3} \text{ και } P(B) = \frac{1}{2}$$

Δ3. Λαμβάνοντας υπόψη το ερώτημα Δ2 και επιπλέον ότι $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ να βρείτε την πιθανότητα: να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα A , B .

Μονάδες 5

Απάντηση.

Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα A , B είναι το συμπληρωματικό του ενδεχομένου $A \cap B$, δηλαδή το

$$(A \cap B)'$$

Αυτό έχει πιθανότητα:

$$\begin{aligned} P((A \cap B)') &= 1 - P(A \cap B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cup B)) = \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} \right) = 1 - \frac{2}{6} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Δ4. να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A , B .

Μονάδες 5

Απάντηση.

Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A , B είναι το ενδεχόμενο $\Gamma = (A - B) \cup (B - A)$ και εφόσον τα $A - B$, $B - A$ είναι ασυμβίβαστα θα είναι:

$$\begin{aligned} P(\Gamma) &= P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A) = \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = \\ &= \frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$