ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΖΕΙΣ 2000
ΔΕΥΤΕΡΑ 22 ΜΑΪΟΥ 2000
ΔΕΣΜΗ ΠΡΩΤΗ (1η)
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Α. Αν $z_1 = \rho_1$ (συνθ_1 + iημθ_1) και $z_2 = \rho_2$ (συνθ_2 +i ημθ_2) είναι η τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 τότε να αποδείξετε ότι

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\text{συν}(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{ημ}(\theta_1+\theta_2)].$$

Β. Έστω $\Omega = \{1,2,...,10\}$ είναι ένας δειγματικός χώρος με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

Αν $\lambda \in \Omega$, θεωρούμε τη συνάρτηση $f : R \to R$, με

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + \lambda^2, \quad x \in R.$$

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Χ,Υ όπου :

Χ : Η μέγιστη τιμή της f στο [0,5], είναι μεγαλύτερη ή ίση του 68/3.

Υ : Η ελάχιστη τιμή της f στο [0,5], είναι μικρότερη ή ίση του 4.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Χ, Υ, $X \cap Y$ και $X \cup Y$.

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Α. Έστω ότι Α,Β είναι $\nu \times \nu$ πίνακες, με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, τέτοιοι, ώστε $4A^2 - B^2 = 1$ και AB=BA, όπου Ι είναι ο $\nu \times \nu$ μοναδιαίος πίνακας,

α) Να αποδείξετε ότι οι πίνακες 2Α+Β και 2Α-Β είναι αντιστρέψιμοι,

β) Έστω Χ,Υ είναι $\nu \times \nu$ πίνακες τέτοιοι, ώστε

$$2AX + BY = 2A + I \quad \text{και} \quad BX + 2AY = B.$$

i) Να αποδείξετε ότι Χ = 2Α + Ι και Υ = - Β.

ii) Να αποδείξετε ότι η ορίζουσα του πίνακα $Y^2 + 2X$ είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός.

Β. Θεωρούμε τα σημεία του επιπέδου Μ(4συνφ, 5ημφ), με φ$\in$[0,2π).

α) i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε έλλειψη, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραπάνω έλλειψης στο σημείο Μ(4συνφ, 5ημφ), με φ$\in$(0,2π).

β) Έστω Ε(φ), με φ$\in$[0,π/2), είναι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη της παραπάνω έλλειψης στο σημείο Μ(4συνφ, 5ημφ) με τους άξονες x'x και y'y.

Να αποδείξετε ότι Ε(φ) $\geq$ 20.

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

Α. Έστω f : R$\to$R συνάρτηση συνεχής στο R.

Έστω Ι : R$\to$R η συνάρτηση με

$$I(x)=\int_0^1\left[\left(f(t)\right)^2-2xt^2f(t)+x^2t^4\right]dt \text{ για } x\in R.$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση Ι παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο

$$x_0=5\int_0^1 t^2 f(t)dt$$

Β. Έστω η συνάρτηση f : (1, +∞) $\to$R με

$$f(x) = 2000 + |\ln(x-1)|$$

Έστω c πραγματικός μεγαλύτερος του 2000.

Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση y=c και η γραφική παράσταση της f τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου, τα Α και Β.

Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f, στα Α και Β, είναι κάθετες μεταξύ τους.

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

Έστω f,g : $R \to R$, είναι συναρτήσεις συνεχείς στο R τέτοιες, ώστε να ισχύει

$$f(x) - g(x) = x - 4 \text{ , για } x \in R.$$

Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y=3x-7$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, καθώς $x \to +\infty$.

α) Να βρείτε τα όρια : i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ και

ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x) + 3x + \eta\mu 2x}{xf(x) - 3x^2 + 1}$

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 2x-3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g, καθώς $x \to +\infty$.