ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1999
ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΛΙΟΥ 1999
ΔΕΣΜΗ ΠΡΩΤΗ (1η)
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΖΗΤΗΜΑ 1°

Α. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση $f : \Delta \to R$ παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος Δ τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε $f'(x_0) = 0$.

Β. Δίνεται συνάρτηση $f : R \to R$, δυο φορές παραγωγίσιμη, η οποία σε σημείο $x_0 \in R$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 και ικανοποιεί τη σχέση ;

$$f''(x) > 4(f'(x) - f(x)), \text{ για κάθε } x \in R$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{-2x}$ είναι κυρτή στο R

β) Να αποδείξετε ότι είναι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in R$

ΖΗΤΗΜΑ 2°

Α. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$, $x, y \in R$

α) Να αποδείξετε ότι, στο μιγαδικό επίπεδο, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ που είναι τέτοια ώστε $|z-1|^2 + |z-3-2i|^2 = 6$ είναι κύκλος.
Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου αυτού.

β) Έστω O η αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου και ε_1, ε_2 είναι οι δύο εφαπτόμενες που άγονται από το O προς τον παραπάνω κύκλο. Να βρείτε τις συντεταγμένες των δύο σημείων επαφής M_1 M_2.

Β. Έστω $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και έστω C κύκλος με κέντρο (2,1) και ακτίνα 1 .
Θεωρούμε τα ενδεχόμενα :
$E = \{\omega \in \Omega$ / το σημείο $M(\omega,1)$ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου C $\}$
$Z = \{\omega \in \Omega$ / το σημείο $N(2,\omega)$ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου C $\}$
Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων
E, Z και $E \cup Z$.

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

Α. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο είναι $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 4$, $\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right| = 6$

και η γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι $\frac{\pi}{3}$.

Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε :

α) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$,

β) Να αποδείξετε ότι η προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ πάνω στο διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι το διάνυσμα $\frac{14}{19}\overrightarrow{AM}$

Β. Έστω Α,Β $\nu\times\nu$ πίνακες, των οποίων τα στοιχεία είναι πραγματικοί αριθμοί. Έστω ότι ισχύει : $A^2 + AB + I = B^2 + BA + I = O$, όπου Ι είναι ο $\nu\times\nu$ μοναδιαίος πίνακας και Ο είναι ο μηδενικός $\nu\times\nu$ πίνακας. Να αποδείξετε ότι :

α) i) Ο πίνακας Α +Β έχει αντίστροφο.

ii) Α = Β

β) ο ν είναι άρτιος.

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(t) = \frac{2t+3}{t+2}$, $t \in [1,4]$

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^4 f(t)\,dt$

β) Έστω η συνάρτηση $g(x) = \int_1^4 f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{t}{x^2}}dt$, $x > 0$

i) Να αποδείξετε ότι : $e^{\frac{1}{x^2}} \le e^{\frac{t}{x^2}} \le e^{\frac{4}{x^2}}$ για κάθε $t \in [1,4]$ και $x > 0$

ii) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

Β. Έστω $h : [1, +\infty) \to R$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση :

$$h(x) = 1999\,(X-1) + \int_1^t \frac{h(t)}{t}dt \quad \text{για κάθε} \quad x \ge 1.$$

Να αποδείξετε ότι :

α) $h(x) = 1999\,x\ln x$, $x \ge 1$.

β) Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$