ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ (ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ)
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2013

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1) Θεωρία-απόδειξη σελίδα 98 σχολικού βιβλίου.

Α2) Θεωρία-διατύπωση θεωρήματος σελίδα 192 σχολικού βιβλίου.

Α3) α) Σωστό, β) Σωστό, γ) Λάθος, δ) Λάθος, ε) Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $z = x + yi(x, y \in \mathbb{R})$ τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(x-1)+yi} = \frac{(x-1)-yi}{(x-1)^2+y^2}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z-1}\right) = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2x - 2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 1$$

ο οποίος είναι κύκλος κέντρου K(2,0) και ακτίνας ρ=1.

Το σημείο που εξαιρείται από τον κύκλο αυτόν είναι το $A(1,0)$, αφού θα πρέπει να ορίζεται το $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z-1}\right) = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}$ και άρα $z \neq 1$, $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $y \neq 0$

Β2) Αφού οι z_1, z_2 ανήκουν στον παραπάνω κύκλο θα είναι $|z_1 - 2| = 1$ και $|z_2 - 2| = 1$.
Έχουμε και με βάση την τριγωνική ιδιότητα:
$|z_1 + z_2 - 4| = |(z_1 - 2) + (z_2 - 2)| \leq |z_1 - 2| + |z_2 - 2| \leq 1 + 1 = 2$ και άρα $|z_1 + z_2 - 4| \leq 2$.

Β3) Οι μιγαδικοί του ερωτήματος Β1 είναι αυτοί που επαληθεύουν τον κύκλο $(x-2)^2 + y^2 = 1$ (1), εκτός του σημείου $A(1,0)$, και αφού $|z| = \sqrt{5}$ θα έχουμε

$|z|^2 = 5 \Leftrightarrow z\bar{z} = 5, z = x + yi(x, y \in \mathbb{R})$

$x^2 + y^2 = 5$ (2)

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) θα έχουμε (αφαιρώντας κατά μέλη) x=2, y=1 ή y=-1

Άρα οι ζητούμενοι μιγαδικοί είναι οι $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 2 - i$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$f'(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x+\ln x+1, x>0$

$f'(x)=\frac{1}{4}\ln^2 x+\frac{1}{4}\ln^2 x+\ln x+1, x>0$

$f'(x)=\frac{1}{4}\ln^2 x+(\frac{\ln x}{2}+1)^2>0, x>0$

Και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\infty)$.

__**Ως προς την κυρτότητα έχουμε:**__ Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$ αφου η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f''(x)=\frac{\ln x+1}{x}, x>0$.

Έχουμε:

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0 \Leftrightarrow x=e^{-1}$

Για $x>e^{-1}$ η $f''(x)>0$ και άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω (κυρτή) στο διάστημα $[\frac{1}{e},\infty)$

Για $0<x<e^{-1}$ η $f''(x)<0$ και άρα η f στρέφει τα κοίλα κάτω (κοίλη) στο διάστημα $(0,\frac{1}{e}]$

(Μπορούμε να κάνουμε και πίνακα μεταβολών της f''. Το σημείο καμπής δεν ζητείται εδώ)

Γ2) Η εξίσωση $f(x^4+2x)=f(4)$, επειδή η f είναι «1-1», (αφού είναι γνησίως αύξουσα) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x^4+2x=4$ ή με την εξίσωση: $x^4+2x-4=0$. Για να έχει τουλάχιστον μία λύση στο (α, α+1), για κάποιον ακέραιο α, θα πρέπει να εφαρμόζεται το Θεώρημα του Bolzano. Για α=1 το διάστημα γίνεται (1,2) και αν θέσουμε $g(x)=x^4+2x-4, x\in[1,2]$ τότε θα έχουμε : $\begin{matrix} g(1)=-1<0 \\ g(2)=16>0 \end{matrix}$ και άρα θα υπάρχει, ένα τουλάχιστον ξ με $\xi\in(1,2): g(\xi)=0$[1].

Γ3) Η δοθείσα ανίσωση για $x>0$ γίνεται διαδοχικά:

$x\ln^2 x<2-2x$

$\frac{x}{2}\ln^2 x<1-x$

$\frac{x}{2}\ln^2 x+x<1$

$f(x)<f(1)$

[1] Λόγω της μονοτονίας της g (αποδεικνύεται εύκολα ότι η είναι γνησίως αύξουσα) η τιμή του α και η ρίζα είναι μοναδικά.

Και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\infty)$ θα είναι: $\begin{matrix} x<1, x>0 \\ o<x<1 \end{matrix}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) Αν θέσουμε $h(x)=3\int_1^x 2tf(t)dt+x^3, x>0$ τότε από την δοθείσα σχέση βρίσκουμε $f(x)=\dfrac{h(x)-3x+8}{3x^2}, x>0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων αφού: Η h είναι παραγωγίσιμη, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων επειδή η tf(t) είναι συνεχής (ως γινόμενο συνεχών) στο $(0,\infty)$.

Παραγωγίζοντας την δοθείσα σχέση στο $(0,\infty)$ έχουμε;

$$6xf(x)+3x^2=6xf(x)+3x^2f'(x)+3, x>0$$

$$f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}, x>0$$

Δ2) Αφού $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}, x>0$ θα έχουμε διαδοχικά:

$$f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}, x>0 \quad f'(x)=1-\frac{1}{x^2}, x>0 \quad f'(x)=(x+\frac{1}{x})', x>0 \quad f(x)=x+\frac{1}{x}+c$$

με c αυθαίρετη σταθερά που θα προσδιορίσουμε:

Για $x=1$ η δοθείσα σχέση δίνει $\begin{matrix}1=3f(1)-5\\ f(1)=2\end{matrix}$ και άρα $\begin{matrix}f(1)=2+c\\ c=0\end{matrix}$

Έτσι η συνάρτηση f είναι $f(x)=x+\dfrac{1}{x}, x>0$

Για την ασύμπτωτη της f έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ και άρα η $y=x$ είναι ασύμπτωτη στο $,+\infty$ της γραφικής παράστασης της f.

Δ3) Το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από τον τύπο:

$$\mathrm{E}=\int_1^{e^2}|f(x)-x|dx=\int_1^{e^2}\left|\frac{x^2+1}{x}-x\right|dx=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}dx=\ln e^2-\ln 1=2\tau.\mu.$$

Δ4) Εφαρμόζοντας το θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα $[1,x]$ με x>1 θα έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $[1,x]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (1,x)

Άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,x)$ τέτοιο, ώστε: $\begin{matrix}f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}, x>1\\ f'(\xi)=\dfrac{f(x)-2}{x-1}, x>1\end{matrix}$

Επειδή η f' είναι παραγωγίσιμη (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}, x>0$ η f έναι κυρτή στο $(0,\infty)$ ή οτι η f' είναι γνησίως αύξουσα $(0,\infty)$ άρα

$1>x>\xi$

θα έχουμε: $f'(x)>f'(\xi)$

$$f'(x)>\frac{f(x)-2}{x-1}, x>1$$

(Υπάρχει και εναλλακτική λύση με την χρήση της τιμής της παραγώγου της f και δημιουργείται μία ανισότητα αληθής για χ>1)