# ΛΥΣΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
# ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ, ΜΑΙΟΣ 2013

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

**Μονάδες 7**

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ Α1:** Σχολικό βιβλίο σελίδα 334

**Α2.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού(Θ.Μ.Τ.)

**Μονάδες 4**

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ Α2:** Σχολικό βιβλίο σελίδα 246.

Αν μία συνάρτηση f είναι : συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β]
παραγωγίσιμη στο ανοικτό (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

**Α3.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 4**

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ Α3:** Σχολικό βιβλίο σελίδα 222.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της , όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \to \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in R \quad \text{και} \quad \lim_{x \to \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in R$$

**Α4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α)** Η εξίσωση $|z - z_o| = \rho$ , $\rho > 0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο Κ ($z_o$) και ακτίνα $\rho^2$, όπου z, $z_o$ μιγαδικοί αριθμοί.

**β)** Αν $\lim_{x \to x_o} f(x) < 0$ <, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο $x_o$

**γ)** Ισχύει ότι: $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε $x \in R$

**δ)** Ισχύει ότι: $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

**ε)** Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 10**

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ Α4:**

| α | β | γ | δ | ε |
|---|---|---|---|---|
| **Λ** | **Σ** | **Σ** | **Λ** | **Σ** |

# ΛΥΣΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
# ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ, ΜΑΙΟΣ 2013

## ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2.$$

**Β1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z , είναι κύκλος με κέντρο Κ(2,0) και ακτίνα ρ = 1. (μονάδες 5)

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z| \le 3$. (μονάδες 3)

**Μονάδες 8**

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ Β1:**

Είναι $(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2 \Rightarrow |z-2|^2+|z-2|-2=0$. Θέτουμε $|z-2|=\omega \ge 0$

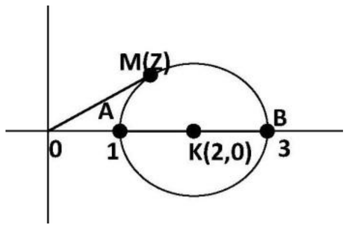
από την $\omega^2+\omega-2=0$ βρίσκουμε τις λύσεις $\omega_1 = -2$ (που απορρίπτεται) και $\omega_2 = 1$

Άρα, $|\mathbf{z-2}|=\mathbf{1}$, δηλαδή ο γ.τ. είναι κύκλος με κέντρο Κ(2, 0) και ακτίνα ρ = 1.

**1ος. τρόπος :** $|z|=|z-2+2| \le |z-2|+2=1+2=3$

**2ος. τρόπος :** από τον γεωμ. τόπο το σημείο με την μέγιστη απόσταση από το Ο(0, 0) είναι το Α(3,0).

Άρα, $|z|_{max}=3$




**Β2.** Αν οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1$ , $z_2$ που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2+\beta w+\gamma=0$, με w μιγαδικό αριθμό, $\beta, \gamma \in R$ , και $|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|=2$ τότε να αποδείξετε ότι: β = − 4 και γ = 5

**Μονάδες 9**

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ Β2:**

Αφού οι $z_1$, $z_2$ είναι ρίζες της δευτεροβάθμιας, είναι συζυγείς, άρα ισχύει $\mathbf{z_1=\bar{z}_2}$

**1ος. τρόπος :**

επομένως $\mathrm{Im}(z_1) = -\mathrm{Im}(z_2)$

οπότε $|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|=2 \Rightarrow |2\mathrm{Im}(z_1)|=2 \Rightarrow |\mathrm{Im}(z_1)|=1 \Rightarrow \mathrm{Im}(z_1)=\pm 1$

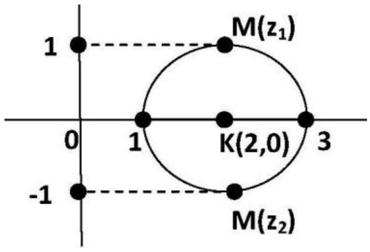
και από το γεωμ. τόπο $(x_1-2)^2+y_1^2=1 \Rightarrow (x_1-2)^2+1=1 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_1=2$

άρα $\mathbf{z_1=2+i}$ και $\mathbf{z_2=2-i}$ και με $z_1+z_2=-\beta=4$ άρα $\boldsymbol{\beta=-4}$

με $z_1.z_2 = \boldsymbol{\gamma=5}$.

**$2^{ος}$ τρόπος:**

Οι εικόνες των συζυγών $z_1$, $z_2$ είναι συμμετρικές ως προς τον x΄x και με δεδομένο ότι οι τεταγμένες τους διαφέρουν κατά 2, δηλαδή κατά μία διάμετρο, είναι σημεία αντιδιαμετρικά με




$\mathbf{z_1=2+i}$ και $\mathbf{z_2=2-i}$ $\Rightarrow z_1+z_2=\mathbf{-\beta=4}$ και $z_1.z_2=\mathbf{\gamma=5}$.

**Β3.** Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $\alpha_o$ , $\alpha_1$ , $\alpha_2$ οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος Αν ο μιγαδικός αριθμός ν ικανοποιεί τη σχέση:

$$\nu^3+\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0=0 \quad \text{τότε να αποδείξετε ότι: } |\nu|<4$$

**Μονάδες 8**

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ Β3**:

**$1^{ος}$ τρόπος :** $\nu^3+\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0=0 \Rightarrow -\nu^3=\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0 \Rightarrow |\nu|^3=|\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0| \Rightarrow$

$$|\nu|^3\le|\alpha_2||\nu|^2+|\alpha_1||\nu|+|\alpha_0| \Rightarrow |\nu|^3\le 3\left(|\nu|^2+|\nu|+1\right) \text{ και } (*)$$

αν $|\mathbf{v}|>\mathbf{1}$ : $|\nu|^3\le 3\dfrac{|\nu|^3-1}{|\nu|-1} \Rightarrow |\nu|^3\le 3\left(\dfrac{|\nu|^3}{|\nu|-1}-\dfrac{1}{|\nu|-1}\right) \Rightarrow |\nu^3|<3\dfrac{|\nu|^3}{|\nu|-1} \Rightarrow 1<\dfrac{3}{|\nu|-1} \Rightarrow |\nu|<4$

αν $|\mathbf{v}|\le\mathbf{1}$ : ομοίως .........

**$2^{ος}$ τρόπος:**

$\dots|\nu|^3\le 3|\nu|^2+3|\nu|+3 \Rightarrow |\nu|^3<3|\nu|^2+3|\nu|+4 \Rightarrow |\nu|^3-3|\nu|^2-3|\nu|-4<0 \Rightarrow$

με Horner $\left(|\nu|-4\right)\left(|\nu|^2+|\nu|+1\right)<0$ όπου το τριώνυμο είναι πάντα θετικό,

άρα πρέπει $|\nu|-4<0 \Rightarrow |\nu|<4$.

**$3^{ος}$ τρόπος:**

Απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο. Έχουμε δείξει ότι $|\nu|^3\le 3|\nu|^2+3|\nu|+3$

Αν υποθέσουμε ότι $|\nu|\ge 4$, τότε έχουμε

$$|\nu|\ge 4 \Rightarrow |\nu|^3\ge 4|\nu|^2=3|\nu|^2+|\nu|^2\ge 3|\nu|^2+4|\nu|\ge 3|\nu|^2+3|\nu|+4, \text{ άτοπο.}$$

(*) $|\nu|^3-1\le 3|\nu^2|+3|\nu|+3-1<3|\nu^2|+3|\nu|+3 \Rightarrow \left(|\nu|-1\right)\left(|\nu^2|+|\nu|+1\right)<3\left(|\nu^2|+|\nu|+1\right) \Rightarrow |\nu|<4$.

**$4^{ος}$ τρόπος:**

Όμοια όπως στην πρώτη λύση καταλήγουμε στο ότι $|\nu|^3-3|\nu|^2-3|\nu|-3\le 0$.

Θεωρώ την $f(x)=x^3-3x^2-3x-3$ οπότε $f\,'(x)=3x^2-6x-3=3(x^2-2x-1)$

$f\,'(x)\ge 0 \Leftrightarrow x\le 1-\sqrt{2}$ ή $x\ge 1+\sqrt{2}$ άρα για $x\ge 4$ είναι γνησίως αύξουσα με $f(4)=1>0$

Όμως, αφού έχουμε ότι $f\left(|\nu|\right)\le 0$ θα είναι $|\nu|<4$

**$5^{ος}$ τρόπος:**

$$1+\frac{\alpha_2}{v}+\frac{\alpha_1}{v^2}+\frac{\alpha_0}{v^3}=0 \Rightarrow -1=\frac{\alpha_2}{v}+\frac{\alpha_1}{v^2}+\frac{\alpha_0}{v^3} \Rightarrow 1\le\frac{|\alpha_2|}{|v|}+\frac{|\alpha_1|}{|v|^2}+\frac{|\alpha_0|}{|v|^3} \quad (1)$$

Αν τώρα $|\nu|\ge 4$, από $(1) \Rightarrow 1\le\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{16}+\dfrac{3}{64}=\dfrac{63}{64}$ , άτοπο

# ΛΥΣΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
# ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ, ΜΑΙΟΣ 2013

## ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$ και
- $g(x) = x^3 + \dfrac{3x^2}{2} - 1$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$, $x \in \mathbb{R}$

**Μονάδες 9**

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ Γ1:**

Θεωρούμε τη συνάρτηση **h(x) = f(x) + x** οπότε η πρώτη σχέση γίνεται

$$h(x).h'(x) = x \Rightarrow \left(\frac{h^2(x)}{2}\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \Rightarrow \frac{h^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + c$$ και για $x = 0$ έχουμε $\mathbf{c=\frac{1}{2}}$

Άρα $h^2(x) = x^2 + 1 \Rightarrow h(x) = \pm\sqrt{x^2+1}$

και με δεδομένα ότι α) **f(0) = 1 ,** β) $x^2+1 \neq 0$ άρα και $h^2(x) \neq 0 \Rightarrow h(x) \neq 0$

γ) η συνάρτηση h είναι συνεχής, συμπεραίνουμε ότι διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Συνεπώς, ισχύει

$h(x) = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow f(x) + x = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \mathbf{f(x) = \sqrt{x^2+1} - x}$.

**Γ2.** Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(g(x)) = 1$

**Μονάδες 8**

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ Γ2:**

**1$^{ος}$ τρόπος:** Αποδεικνύουμε ότι $\sqrt{x^2+1} > x \Rightarrow x - \sqrt{x^2+1} < 0$ . Από αυτό συμπεραίνουμε ότι $f'(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} < 0$ άρα η συνάρτηση f είναι φθίνουσα στο R, άρα είναι **1 – 1,**

οπότε $f(g(x)) = 1 = f(0) \Leftrightarrow$ **g(x) = 0** $g(x) = x^3 + \dfrac{3x^2}{2} - 1 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 3x = 3x(x+1)$.

Η g έχει τον διπλανο πίνακα και για την οποία ισχύουν **g(0) = -1** και $\mathbf{g(-1) = -\frac{1}{2}}$

όπως επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3) = +\infty$

| x | $-\infty$ | | -1 | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| g′(x) | | + | 0 | − | 0 | + | |
| g(x) | $-\infty$ | ↗ | $-\frac{1}{2}$ | ↘ | -1 | ↗ | $+\infty$ |

Άρα για το σύνολο τιμών της g έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}(-\infty,-1]\to(\lim\limits_{x\to-\infty}g(x),g(-1)]=(-\infty,-\frac{1}{2}]\\ (-1,0)\to\left(g(0),g(-1)\right)=\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\\ [-0,+\infty)\to[g(0),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x))=[-1,+\infty)\end{array}\right\}$$

το 0 υπάρχει μόνο στο διάστημα $[-1,+\infty)$ άρα έχουμε μοναδική λύση λόγω της μονοτονίας.

<u>**2ος τρόπος**</u>**:** $f(g(x))=1\Rightarrow\sqrt{g^2(x)+1}-g(x)=1\Rightarrow\sqrt{g^2(x)+1}=1+g(x)$, **(1)**

αν $g(x)+1\geq 0\Rightarrow x^3+\frac{3x^2}{2}\geq 0\Rightarrow x^2(x+\frac{3}{2})\geq 0\Rightarrow x+\frac{3}{2}\geq 0\Rightarrow x\geq-\frac{3}{2}$

**(1)** $\Rightarrow g^2(x)+1=g^2(x)+2g(x)+1\quad\Rightarrow$ **g(x)=0** και ομοίως…..

αν $g(x)+1<0$ η **(1)** είναι αδύνατη.

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,\frac{\pi}{4})$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt=f(x_0-\frac{\pi}{4})\,\varepsilon\varphi x_0$$

**Μονάδες 8**

<u>**ΑΠΑΝΤΗΣΗ Γ3:**</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\boldsymbol{\varphi(x)=\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt-f(x-\frac{\pi}{4})\cdot\varepsilon\varphi x}$ με $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής, άρα η $\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής. Επίσης η $f(x-\frac{\pi}{4})$ συνεχής ως σύνθεση συνεχών, έχουμε

- $\varphi(x)$ συνεχής ως αλγεβρικό άθροισμα συνεχών στο $[0,\frac{\pi}{4}]$
- $\phi(\frac{\pi}{4})=\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt-\varepsilon\phi\frac{\pi}{4}f(0)=-1<0$
- $\phi(0)=\int_{0-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt-\varepsilon\phi 0f(-\frac{\pi}{4})=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt\ >0$

Διότι, έχουμε αποδείξει ότι η f παίρνει θετικές τιμές στο R,

άρα και στο διάστημα $[-\frac{\pi}{4},0]$,

συνεπώς το αντίστοιχο ολοκλήρωμα είναι θετικός αριθμός, άρα $\varphi(0)>0$.

Από τα παραπάνω ισχύει το θεώρημα Bolzano και υπάρχει τουλάχιστον ένα …..

**ΛΥΣΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ, ΜΑΙΟΣ 2013**

## ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$
- $f(1)=1$
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x)=\displaystyle\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt$ , $x\in(1,+\infty)$ και $\alpha>1$

Να αποδείξετε ότι:

**Δ1.** $f'(1)=0$ (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ (μονάδες 2).

**Μονάδες 6**

### ΑΠΑΝΤΗΣΗ Δ1:

Από τον ορισμό του παράγωγου αριθμού $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

θέτω x= 1+5h και όταν $x\to 1$ τότε $h\to 0$ γίνεται $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1)}{5h}$

θέτω x = 1- h και όταν $x\to 1$ τότε $h\to 0$ γίνεται $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

Συνεπώς το αρχικό όριο γράφεται ως

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(1+5h)-f(1)}{h}-\frac{f(1-h)-f(1)}{h}\right]=0\Rightarrow\lim_{h\to 0}\left[5\frac{f(1+5h)-f(1)}{5h}+\frac{f(1-h)-f(1)}{h}\right]=0\Rightarrow$$

$5f'(1)+f'(1)=0 \Rightarrow$ $\boldsymbol{f'(1)=0}$

Επειδή η **f ΄** είναι αύξουσα με **f ΄(1)=0**
για $0<x<1$ έχουμε $f'(x)<0$ και
για $x>1$ $f'(x)>0$
Αρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x = 1.

| x | $-\infty$ | $-\frac{3}{2}$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t'(x)$ | | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $t(x)$ | | $-2$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $+\infty$ |

**Δ2.** η g είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια,

να λύσετε την ανίσωση στο R $\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)du$ (μονάδες 6)

**Μονάδες 9**

**<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ Δ2:</u>**

Η συνάρτηση $\frac{f(t)-1}{t-1}$ είναι συνεχής για $x > 1$ άρα η g είναι παραγωγίσιμη

με $g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}$ όπου $\mathbf{x - 1 > 0}$ και $\mathbf{f(x) - 1 > 0}$ λόγω ελάχιστου.

Άρα, $\mathbf{g'(x) > 0}$ και επομένως η g είναι αύξουσα στο $(1,+\infty)$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\boldsymbol{\varphi(x) = \int_x^{x+1} g(u)du}$ με $\mathbf{x>1}$

είναι $\varphi'(x) = g(x+1) - g(x)$ και με $x+1 > x$ και επειδή g αύξουσα

προκύπτει $\boldsymbol{\varphi'(x) > 0}$ **,** δηλαδή η **φ** είναι **αύξουσα** οπότε

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)du \Rightarrow \phi(8x^2+5) > \phi(2x^4+5) \Rightarrow \quad 8x^2 + 5 > 2x^4 + 5 \quad \Rightarrow$$

$2x^2(4 - x^2) > 0 \quad \Rightarrow x^2 < 4 \quad \Rightarrow -2 < x < 2,$ αλλά $x \neq 0$ άρα $\mathbf{x \in (-2,0) \cup (0, 2)}$**.**

**Δ3.** η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση

$(\alpha - 1) \int_\alpha^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt = (f(\alpha) - 1)(x - \alpha)$ , $x > 1$ έχει ακριβώς μια λύση.

**Μονάδες 10**

**<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ Δ3</u>:**

Βρήκαμε ότι $g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}$ που είναι παραγωγίσιμη για $x > 1$

με $g''(x) = \frac{f'(x)(x-1)-f(x)+1}{(x-1)^2}$. Θα δείξω ότι ο αριθμητής είναι θετικός

Η συνάρτηση **f** είναι συνεχής στο διάστημα $[1, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, x)$

Άρα από το **ΘΜΤ** υπάρχει ξ με $\mathbf{1 < \xi < x}$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

Επειδή η $f'$ είναι αύξουσα οπότε $\mathbf{f'(1) < f'(\xi) < f'(\chi)} \Rightarrow$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} < f'(x) \Rightarrow f(x) - f(1) < f'(x)(x-1) \quad \text{αφού } x > 1$$

$$\Rightarrow f(x) - 1 < f'(x)(x-1) \Rightarrow f'(x)(x-1) - f(x) + 1 > 0$$

άρα $\mathbf{g''(x) > 0}$ και επομένως η **g είναι κυρτή**.

Η εξίσωση $(\alpha-1)\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt=(f(\alpha)-1)(x-\alpha)$ που γράφεται

(α-1)g(x) = (f(α)-1)(x-α) $\Rightarrow g(x)=\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}(x-\alpha)$ έχει **προφανή** λύση την **x = α.**

Θα αποδείξουμε ότι αυτή είναι μοναδική

**<u>1^ος τρόπος;</u>**

Η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_g$ στο σημείο (α, g(α)) είναι :

$$y-g(\alpha)=g'(\alpha)(x-\alpha) \quad \text{αλλά } g(\alpha)=0$$

$$y=g'(\alpha)(x-\alpha) \Rightarrow y=\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}(x-\alpha).$$

Επειδή όμως η g είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της άρα ισχύει $g(x)\geq y$ με **μοναδικό** σημείο για το οποίο ισχύει η ισότητα είναι το σημείο επαφής, δηλαδή όταν **x = α** (μοναδική λύση)

**<u>2^ος τρόπος</u>:**

Θεωρώ τη συνάρτηση **K(x)=(α-1)g(x) - (f(α) - 1)(x-α)**

Η συνάρτηση **g** είναι κυρτή, άρα η **g ΄** είναι αύξουσα, συνεπώς

- για **x > α > 1** έχουμε $g'(x)>g'(\alpha) \Rightarrow g'(x)>\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1} \Rightarrow (\alpha-1)g'(x)>f(\alpha)-1 \Rightarrow$

  $(\alpha-1)g'(x)-f(\alpha)+1>0 \Rightarrow$ **K΄(x) > 0** άρα η **K αύξουσα.**

- για **x = α** έχουμε $K'(\alpha)=(\alpha-1)\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}-f(\alpha)+1 \Rightarrow K'(\alpha)=0$.

- για **1 < x < α** έχουμε ομοίως **K΄(x) < 0,** άρα **K(x)** φθίνουσα.

Άρα, για x > α για τις τιμές αυτές η K είναι αύξουσα έχουμε K(x) > K(α) = 0.

Για 1 < x < α, όπου η K είναι φθίνουσα, έχουμε K(x) > K(α) = 0 και **μόνο** για **x = α** έχουμε K(x) = K(α) = 0.

**<u>3^ος τρόπος</u>:**

Από το δεδομένο έχουμε $g'(x)=\frac{f(x)-1}{x-1} \Rightarrow g'(a)=\frac{f(a)-f(1)}{a-1}$, (1).

Η προς επίλυση εξίσωση γράφεται (α-1)·g(x) = (f(α) - 1)·(x-α)

δηλαδή $\frac{g(x)}{x-a}=\frac{f(a)-1}{a-1} \Rightarrow \frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\frac{f(a)-f(1)}{a-1}$. (2)

Από το Θ.Μ.Τ. για την g στο διάστημα (α, x) ή στο (x, α) και λόγω της σχέσης (1), η εξίσωση (2) γράφεται g΄(ξ) = g΄(α).

Επειδή η g’ είναι γνησίως αύξουσα θα είναι και 1-1, άρα ξ = α.

Δηλαδή, η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η τιμή α.