ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΪΟΥ 2013
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 4

Α3. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση ποσοτικών δεδομένων

α) Για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$ ισχύει ότι $f'(x)=\frac{1}{x^2}$.

(μονάδες 2)

β) Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+ f(x)g'(x)$$

(μονάδες 2)

γ) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής. (μονάδες 2)

δ) Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις. (μονάδες 2)

ε) Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, ισχύει ότι $P(A) > P(B)$ (μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑ 1$^{\text{Ο}}$

Α1. Απάντηση από το Σχολικό βιβλίο σελίδα 28

Α2. Απάντηση από το Σχολικό βιβλίο σελίδα 14

Α3. Απάντηση από το Σχολικό βιβλίο σελίδα 87

Α4.

α	β	γ	δ	ε
Λ	**Σ**	**Λ**	**Λ**	**Λ**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2,\omega_3,\omega_4\}$ και τα ενδεχόμενα

$$A = \{\omega_1,\omega_4\} \text{ και } B = \{\omega_1,\omega_3\}$$

Για τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων $\{\omega_1\}$ και $\{\omega_3\}$ του Ω ισχύει ότι:

- $P(\omega_1)= -\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}$
- Η $P(\omega_3)$ είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της $f(x)$ ως προς x, όταν $x=1$, όπου

$$f(x)=\frac{x}{3}\ln x,\ x>0$$

Β1. $P(\omega_1)=\frac{1}{4}$ και $P(\omega_3)=\frac{1}{3}$.

Μονάδες 10

Β2. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{3}\le P(A')\le\frac{3}{4}$, όπου A' το συμπληρωματικό του Α.

Μονάδες 7

Β3. Αν $P(A')=\frac{3}{4}$ να βρεθεί τις πιθανότητες $P(\omega_2)$, $P(\omega_4)$, $P[(A-B)\cup(B-A)]$ και $P(A'-B')$, όπου B' το συμπληρωματικό του Β .

Μονάδες 8

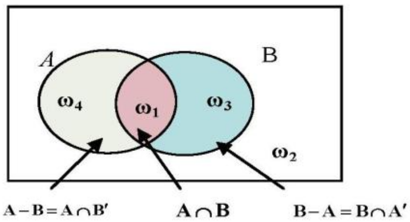
ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΘΕΜΑ 2

Β1.

$$-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{(\sqrt{x^2+x+1}-1)\cdot(\sqrt{x^2+x+1}+1)}{x^2(x+1)\cdot(\sqrt{x^2+x+1}+1)}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{x(x+1)}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{x}{x^2(\sqrt{x^2+x+1}+1)}=-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})=\frac{1}{4} \quad \text{άρα} \quad \mathbf{P(\omega_1)=\frac{1}{4}}$$

Αν $\mathbf{f(x)=\frac{x}{3}\ln x}$ τότε $\mathbf{f'(x)=\frac{1}{3}\ln x+\frac{1}{3}}$ και για χ=1 : $f'(1)=\frac{1}{3}$ άρα $\mathbf{P(\omega_3)=\frac{1}{3}}$



Β2. 1ος τρόπος : αφού $\mathbf{A=\{\omega_1,\omega_4\}}$ άρα $\mathbf{A'=\{\omega_2,\omega_3\}}$ επομένως

$$\mathbf{P(A')}=P(\omega_2)+P(\omega_3)=P(\omega_2)+\frac{1}{3}\ge\frac{1}{3} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{P(A')\ge\frac{1}{3}}$$

θα αποδείξουμε ότι $\mathbf{P(A')\le\frac{3}{4}} \Leftrightarrow 1-P(A)\le\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(A)\ge 1-\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(A)\ge\frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow P(\omega_1)+P(\omega_4)\geq\frac{1}{4}\Leftrightarrow P(\omega_1)\geq 0 \quad \text{που ισχύει}$$

<u>2^{ος} τρόπος:</u> $\frac{1}{3}\leq P(A')\leq\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{3}\leq 1-P(A)\leq\frac{3}{4}\Leftrightarrow -1+\frac{1}{3}\leq -P(A)\leq -1+\frac{3}{4}\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{4}\leq P(A)\leq\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{4}\leq P(\omega_1)+P(\omega_4)\leq\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{4}\leq\frac{1}{4}+P(\omega_4)\leq\frac{2}{3}\Leftrightarrow$$

$$0\leq P(\omega_4)\leq\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\Leftrightarrow 0\leq P(\omega_4)\leq\frac{5}{12}$$

το αριστερό μέλος της διπλής ανισότητας είναι προφανές , αποδεικνύουμε το δεξί:

επειδή $P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=1 \Rightarrow P(\omega_2)+P(\omega_4)=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

$P(\omega_2)+P(\omega_4)=\frac{5}{12}$ άρα $P(\omega_4)\leq\frac{5}{12}$

<u>**Β3.**</u> Επειδή $P(A')=\frac{3}{4}\Rightarrow P(\omega_2)+P(\omega_3)=\frac{3}{4}\Rightarrow P(\omega_2)=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\Rightarrow \mathbf{P(\omega_2)=\frac{5}{12}}$

Επειδή $P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=1\Rightarrow P(\omega_4)=1-\frac{1}{4}-\frac{5}{12}-\frac{1}{3}\Rightarrow \mathbf{P(\omega_4)=0}$

Επομένως $P(A)=P(\omega_1)+P(\omega_4)=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$ και

$$P(B)=P(\omega_1)+P(\omega_3)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12} \quad \text{και} \quad P(A\cap B)=P(\omega_1)=\frac{1}{4}$$

$$P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{7}{12}-2\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$$

<u>1^{ος} τρόπος</u> :

$$P(A'-B')=P\left(A'\cap(B')'\right)=P(A'\cap B)=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{7}{12}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$$

<u>2^{ος} τρόπος</u> :

$$P(A'-B')=P(A')-P(A'\cap B')=1-P(A)-P((A\cup B)')=1-P(A)-1+P(A\cup B)$$

$$-P(A)+P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}$$

<u>3^{ος} τρόπος</u> Είναι $A'=\{\omega_2,\omega_3\}$ και $B'=\{\omega_2,\omega_4\}$ οπότε προκύπτει ότι $A'-B'=\{\omega_2\}$

και $\mathbf{P(A'-B')}=P(\omega_2)=\mathbf{\frac{1}{3}}$

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα ν παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής X , τις οποίες ομαδοποιούμε σε 4 ισοπλατείς κλάσεις.

Δίνεται ότι:

- η μικρότερη παρατήρηση είναι 50
- η κεντρική τιμή της τέταρτης κλάσης είναι $x_4 = 85$
- η σχετική συχνότητα της τέταρτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της τρίτης κλάσης
- η διάμεσος των παρατηρήσεων του δείγματος είναι δ = 75 και
- η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x} = 74$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος είναι c = 10.

Μονάδες 4

Γ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συμπληρωμένο σωστά

Κλάσεις	Κεντρικές Τιμές x_i	Σχετική Συχνότητα f_i
[· , ·)		
[· , ·)		
[· , ·)		
[· , ·)		
Σύνολο		

Μονάδες 8

Γ3. Δίνεται ότι $f_1=0{,}1$, $f_2=0{,}3$, $f_3=0{,}2$, $f_4=0{,}4$ Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων, που είναι μικρότερες του 80, είναι $\frac{200}{3}$

Μονάδες 7

Γ4. Επιλέγουμε κ παρατηρήσεις του αρχικού δείγματος με κ<ν, οι οποίες ακολουθούν κανονική κατανομή με

- το 2,5% των παρατηρήσεων αυτών να είναι τουλάχιστον 74
- το 16% των παρατηρήσεων αυτών να είναι το πολύ 68

Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων αυτών καθώς και να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων αυτών είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. 1ος τρόπος : Η τέταρτη κλάση είναι το διάστημα [50 + 3c , 50 + 4c) όπου c το πλάτος

$$\text{άρα } \frac{50+3c+50+4c}{2} = 85 \Rightarrow 100+7c = 170 \Rightarrow \mathbf{c=10}$$

2ος τρόπος : πρακτικά ισχύει 50 + 3,5c = 85 ⇒..⇒ c=10

Γ2. Ισχύουν οι σχέσεις : $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1$ (1)

$f_4 = 2f_3$ (2)

επειδή **δ=75** άρα το 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες και το 50% μεγαλύτερες

$$f_1 + f_2 + \frac{1}{2}f_3 = \frac{1}{2}f_3 + f_4 \qquad (3)$$

επειδή $\mathbf{\bar{x} = 74}$ $\qquad 55f_1 + 65f_2 + 75f_3 + 85f_4 = 74 \qquad (4) \qquad (3) \Rightarrow f_1 + f_2 = f_4$

$(1)+(2) \Rightarrow f_4 + \frac{1}{2}f_4 + f_4 = 1 \Rightarrow \mathbf{f_4 = \frac{2}{5} = 0,4}$ τότε $\mathbf{f_3 = 0,2}$ και ….. $\mathbf{f_1 = 0,1}$ και $\mathbf{f_2 = 0,3}$

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	Σχετική Συχνότητα f_i
[50, 60)	55	0,1
[60, 70)	65	0,3
[70, 80)	75	0,2
[80, 90)	85	0,4
Σύνολο		1

παρατηρήσεις : συμπλήρωση Πίνακα 6 μονάδες και αιτιολόγηση 2 μονάδες

Γ3. οι σχετικές συχνότητες του νέου δείγματος είναι :

$$f_1' = \frac{v_1}{v - v_4} = \frac{\frac{v_1}{v}}{1 - \frac{v_4}{v}} = \frac{f_1}{1 - f_4} = \frac{0,1}{1 - 0,4} = \frac{1}{6} \quad \text{ομοίως} \quad f_2' = \frac{f_2}{1 - f_4} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad f_3' = \frac{f_3}{1 - f_4} = \frac{1}{3}$$

επομένως η μέση τιμή είναι : $\bar{x}' = x_1 \cdot f_1' + x_2 \cdot f_2' + x_3 \cdot f_3'$

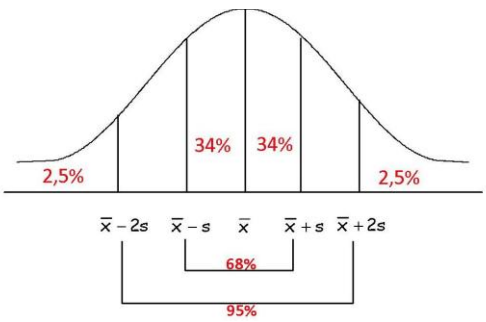
$$\bar{x}' = \frac{1}{6}55 + \frac{1}{2}65 + \frac{1}{3}75 = ... = \frac{200}{3}$$

Γ4. Με βάση τον πίνακα της κανονική κατανομή ισχύει 2,5% = 2,35% + 0,15%

που είναι μεγαλύτερες του 74 βρίσκονται στο διάστημα με κάτω άκρο το $\bar{x}'' + 2s$

καθώς επίσης και το 16% = 0,15% + 2,35% +13,5%

που είναι μικρότερες ή ίσες του 68 βρίσκονται στο διάστημα με άνω άκρο το $\bar{x}'' - s$



άρα $\left.\begin{array}{l} \bar{x}'' + 2s = 74 \\ \bar{x}'' - s = 68 \end{array}\right\}$ λύνω και

βρίσκω $\bar{x}'' = 70$ και $s = 2$

για τον $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{70} \simeq 0,03 \simeq 3\%$ άρα

το δείγμα είναι ομοιογενές

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x\ln x + κ$, $x > 0$, όπου κ ακέραιος με $κ > 1$ και την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(1,f(1))$, η οποία σχηματίζει με τους άξονες, τρίγωνο εμβαδού Ε, με $E<2$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $κ=2$.

Μονάδες 5

Δ2. Έστω $x_1, x_2, ..., x_{50}$ οι τετμημένες 50 σημείων της (ε) των οποίων οι αντίστοιχες τεταγμένες τους έχουν μέση τιμή $\bar{y}=31$

α) Να αποδείξετε ότι $\bar{x} = 30$ (μονάδες 2)

β) Για τις τετμημένες των παραπάνω σημείων θεωρούμε ότι:

Κάθε μία από τις τετμημένες $x_1, x_2, ..., x_{20}$ αυξάνεται κατά 3, οι επόμενες 15 τετμημένες παραμένουν σταθερές και κάθε μία από τις υπόλοιπες ελαττώνεται κατά $λ \in \mathbb{R}$ με $λ > 0$.

Να βρείτε το λ, ώστε η νέα μέση τιμή των τετμημένων να είναι ίση με 31

(μονάδες 4)

Μονάδες 6

Δ3. Αν $\frac{1}{e}<α<β<γ<e$ με $α^α \cdot β^β \cdot γ^γ=e^7$, τότε να βρείτε το εύρος R και τη μέση τιμή των τιμών $f(α), f(β), f(γ), f(e), f'(\frac{1}{e})$, όπου $f(x) = x\ln x + 2$

Μονάδες 7

Δ4. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο

$$Ω =\{t_n, n=1,2,3, \dots, 30 : 0<t_1<t_2< \dots < t_{10}< \frac{1}{e} <t_{11}< \dots <t_{30}=1\}$$

με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, καθώς και τα ενδεχόμενα

$A=\{t \in Ω$: η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(t,f(t))$, να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία$\}$,

$B = \{t \in Ω: f(t) > f'(t)+1\}$,

όπου $f(t) = t\ln t + 2$

Να βρεθούν οι πιθανότητες:

α) να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α (μονάδες 3)

β) να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα Α και Β (μονάδες 4)

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Αν $f(x) = x\ln x + κ$ τότε $f'(x) = \ln x + 1$ με $f(1) = κ$ και $f'(1) = 1$

άρα η εξίσωση της εφαπτόμενης είναι

$y - f(1) = f'(1)(χ-1) \Rightarrow y – κ = χ – 1 \Rightarrow \mathbf{y = x + κ - 1}$

για $χ = 0$: $y = κ – 1$ και για $y = 0$: $χ = 1-κ$ άρα τέμνει τους άξονες

στα σημεία **Α (0 , κ-1)** και **Β (1-κ , 0)**

Επομένως για το εμβαδό έχουμε $E < 2 \Rightarrow \frac{1}{2}|OA|\cdot|OB| < 2 \Rightarrow \frac{1}{2}|\kappa-1|\cdot|1-\kappa| < 2$

$$\Rightarrow |\kappa-1|^2 < 4 \Rightarrow -2 < \kappa-1 < 2 \Rightarrow -1 < \kappa < 3$$

και επειδή κ ακέραιος με $\kappa < 1$ άρα $\mathbf{\kappa = 2}$

Δ2. Για κ=2 η εφαπτόμενη γίνεται $\mathbf{y = x + 1}$ επομένως έχουμε την κατανομή

που ορίζεται ως $\mathbf{y_i = x_i + 1}$ με $i = 1,2,\ldots,50$

και έχει $\bar{y} = \bar{x} + 1 \Rightarrow 31 = \bar{x} + 1 \Rightarrow \mathbf{\bar{x} = 30}$

Η νέα μέση τιμή είναι : $\bar{x}' = \dfrac{x_1' + x_2' + \ldots + x_{20}' + x_{21}' + x_{22}' + \ldots + x_{35}' + x_{36}' + x_{37}' + \ldots + x_{50}'}{50} =$

$$= \frac{x_1 + 3 + x_2 + 3 + \ldots + x_{20} + 3 + x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{35} + x_{36} - \lambda + .. + x_{50} - \lambda.}{50} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{50}}{50} + \frac{20\cdot 3}{50} - \frac{15\lambda}{50} = \bar{x} + \frac{60 - 15\lambda}{50}$$

άρα $31 = 30 + \dfrac{60-15\lambda}{50} \Rightarrow 50 = 60 - 15\lambda \Rightarrow \mathbf{\lambda = \frac{2}{3}}$

Δ3. Αν $f(x) = x\ln x + 2$ τότε $f'(x) = \ln x + 1$ επομένως $f'(x) \geq 0 \Rightarrow \ln x \geq -1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{e}$ και

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x) = \ln x + 1$			−	0	+	
$f(x)$			↘	0	↗	

άρα αν $\frac{1}{e} < \alpha < \beta < \gamma < e$ όπου η $f \uparrow$ ισχύει : $f(\frac{1}{e}) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$

με $\mathbf{f(e) = e\ln e + \kappa = e + 2}$ και $\mathbf{f'(\frac{1}{e}) = \ln\frac{1}{e} + 1 = 0}$ όποτε ισχύει

$$0 = f'(\tfrac{1}{e}) < f(\tfrac{1}{e}) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e) = e + 2$$

επομένως $\mathbf{R = f(e) - f'(\frac{1}{e})} = e+2 - 0 = \mathbf{e + 2}$

επίσης $\bar{x}'' = \dfrac{f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(e) + f'(\frac{1}{e})}{5} = \dfrac{\alpha\ln\alpha + \beta\ln\beta + \gamma\ln\gamma + e + 8 + 0}{5} =$

$$=\frac{\ln(\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\cdot\gamma^{\gamma})+8+e}{5}=\frac{\ln e^{7}+8+e}{5}=\frac{15+e}{5}$$

<u>Δ4</u> Για να σχηματίζει η εφαπτόμενη οξεία γωνία πρέπει

$$\varepsilon\varphi\omega>0\Rightarrow\lambda>0\Rightarrow \boldsymbol{f'(t)>0}\Rightarrow \ln t+1>0\Rightarrow t>\frac{1}{e}\ .$$

Αρα $A=\{t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{30}\}$ με **N(A) = 20**

Η ανίσωση $f(t)>f'(t)+1\Rightarrow\ldots\Rightarrow(t-1)\ln t>0$ με $0<t\le 1$

άρα πρέπει οι αριθμοί (t -1) και lnt να είναι ομόσημοι δηλαδή $\boldsymbol{t\neq 1}$.

Άρα $B=\{t_1, t_2, \ldots, t_{29}\}$ όποτε $A\cap B=\{t_{11},t_{12},\ldots,t_{29}\}$ με $\mathbf{N(A\cap B)=19}$

* $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$ * $P(A\cap B)=\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\frac{19}{30}$