ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

« ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ»

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013

Θέμα Α

Α1. Θεωρία, σελ. 150 Σχολικό Βιβλίο (απόδειξη)

Α2. Θεωρία, σελ.92 Σχολικό Βιβλίο (Ορισμός)

Α3. Θεωρία, σελ. 22 Σχολικό Βιβλίο (Ορισμός)

Α4. **α) Σ** **β) Σ** **γ) Σ** **δ) Λ** **ε) Λ**

Θέμα Β

Β1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R (ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με

$f'(x) = 2e^x(2x-1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Για $x<\frac{1}{2}$ έχουμε $f'(x)<0$ και άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty, \frac{1}{2}]$

Για $x>\frac{1}{2}$ έχουμε $f'(x)>0$ και άρα η f είναι γν. αύξουσα $[\frac{1}{2}, \infty)$

Η f έχει Τ. ελάχιστο στο $x_1 = \frac{1}{2}$ το $f(\frac{1}{2}) = -4\sqrt{e}$

Β2. Ως συνέπεια του προηγούμενου ερωτήματος έχουμε ότι :

$P(A) = x_1 = \frac{1}{2}$

$P(B) = -\frac{f(x_1)}{6\sqrt{e}} = -\frac{-4\sqrt{e}}{6\sqrt{e}} = \frac{2}{3}$

Β3. Έστω ότι τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα τότε θα είναι

$A \bigcap B = \varnothing$
$P(A \bigcap B) = 0$

Τώρα θα έχουμε από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων :
$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} > 1$ που είναι **άτοπο**, άρα τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

Β4. Προφανώς έχουμε

$A' - B' = A' \bigcap B \subseteq B$
$P(A' - B') \leq P(B) = \frac{2}{3}$

Θα αποδείξουμε και ότι $P(A' - B') \geq \frac{1}{6}$. Έχουμε:

$P(A' - B') = P(A' \bigcap B) = P(A') + P(B) - P(A' \bigcup \mathrm{B}) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - P(A' \bigcup \mathrm{B}) = \frac{7}{6} - P(A' \bigcup \mathrm{B})$

Άρα έχουμε ισοδύναμα : $P(A' - B') \geq \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{7}{6} - P(A' \bigcup \mathrm{B}) \geq \frac{1}{6} \Leftrightarrow P(A' \bigcup \mathrm{B}) \leq 1$ που είναι αληθές

<u>Θέμα Γ</u>

Γ1. Αφού οι F_3 , F_5 είναι ρίζες της εξίσωσης $5x^2 - 8x + 3\kappa = 0$ θα ισχύουν οι τύποι του Vietta: Άρα (και αφού F_5=1) θα έχουμε:

$$F_3 + \mathrm{F}_5 = \frac{8}{5} \Leftrightarrow F_3 + 1 = \frac{8}{5} \Leftrightarrow F_3 = \frac{3}{5} = 0,6$$
$$F_3 \cdot \mathrm{F}_5 = \frac{3\kappa}{5} \Leftrightarrow 0,6 = \frac{3\kappa}{5} \Leftrightarrow \kappa = 1$$

$F_5\% = \kappa\lambda^2 - 3\lambda + 30 = 100 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 70 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 10, \lambda = -7(\textit{απορρίπτεται}$ αφού $\mathrm{F}_1\% = \lambda > 0)$

Γ2. Για τις σχετικές συχνότητες % έχουμε:

$f_1\% = \lambda = 10\%$
$f_2\% = F_2\% - f_1\% = 2\lambda + 10 = 30\%$
$f_3\% = F_3\% - f_2\% = 60 - (3\lambda + 10) = 50 - 3\lambda = 20\%$
$f_4\% = F_4\% - 60\% = \kappa\lambda^2 - 2\lambda - 50 = 30\%$
$f_5\% = F_5\% - F_4\% = -\lambda + 20 = 10\%$

Γ3. Αφού το 25% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 16 θα είναι όσες παρατηρήσεις ανήκουν στην πρώτη κλάση (10%) και το μισό της $2^{ης}$ κλάσης (δηλαδή το άλλο 15%).Άρα θα είναι όλες οι παρατηρήσεις χi με: $x_i > \frac{2a+3c}{2} = 16 \Leftrightarrow 2a+3c = 32(I)$

Ακόμα, αφού το 25% των παρατηρήσεων είναιμεγαλύτερες ή ίσες από το 24 θα είναι οι μισές παρατηρήσεις της $4^{ης}$ κλάσης και όλες οι παρατηρήσεις της $5^{ης}$ κλάσης, άρα θα είναι όλες οι παρατηρήσεις χj με $x_j \geq \frac{2a+7c}{2} = 24 \Leftrightarrow 2a+7c = 48(II)$. Από το σύστημα των σχέσεων (Ι) και (ΙΙ) προκύπτει ότι α=10 και c=4.

Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

Κλάσεις	**Κεντρικές τιμές χι**	**fi%**	**Fi**	**Fi%**
[10,14)	12	10	0,1	10
[14,18)	16	30	0,4	40
[18,22)	20	20	0,6	60
[22,26)	24	30	0,9	90
[26,30)	28	10	1	100
ΣΥΝΟΛΑ		100		

Γ4. Οι παρατηρήσεις που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 22 είναι όσες ανήκουν στην $4^{η}$ και $5^{η}$ κλάση και άρα οι σχετικές συχνότητες τους είναι:

$f_4 + f_5 = 0,4$

$\frac{\nu_4}{\nu} + \frac{\nu_5}{\nu} = 0,4 \Leftrightarrow \frac{\nu_4+\nu_5}{\nu} = 0,4 \Leftrightarrow \frac{800}{\nu} = 0,4 \Leftrightarrow \nu = 2000$

Όπου ν το μέγεθος του δείγματος.

<u>Θέμα Δ</u>

Δ1. **α)** Έχουμε τις πιθανότητες των ω_1 και ω_2

$$P(\omega_1) = f(\omega_1) - \frac{1}{3} = f(-1) - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$P(\omega_2) = f(\omega_2) - \frac{1}{3} = f(0) - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Για την πιθανότητα του ω_3 θα έχουμε: Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, x \in \mathbb{R}$ και άρα έχουμε:

$$P(\omega_3) = -\frac{1}{6}\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{x-1} = \frac{1}{6}\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{(1+x^2)^2(x-1)} = \frac{1}{6}\lim_{x\to1}\frac{x+1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{12}$$

Για την πιθανότητα του ω_3 θα έχουμε:

$$P(\Omega)=1 \Leftrightarrow P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=1 \Leftrightarrow P(\omega_4)=1-\frac{11}{12}=\frac{1}{12}$$

β) Για το ενδεχόμενο Α είναι:

$$A=\left\{\omega\in\Omega/\frac{1-\omega^2}{(1+\omega^2)^2}\le 0\right\}=\left\{\omega\in\Omega/1-\omega^2\le 0\right\}=\left\{\omega\in\Omega/\omega\ge 1 \text{ ή } \omega\le -1\right\}=\left\{\omega_1,\omega_3,\omega_4\right\}$$

$$P(A)=P(\omega_1)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

Για το ενδεχόμενο Β είναι :

$$B=\left\{\omega\in\Omega/\frac{\omega}{\omega^2+1}+1>1\right\}=\left\{\omega\in\Omega/\frac{\omega}{\omega^2+1}>0\right\}=\left\{\omega\in\Omega/\omega>0\right\}=\left\{\omega_3,\omega_4\right\}$$

$$P(B)=P(\omega_3)+P(\omega_4)=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$$

Για το ενδεχόμενο Γ είναι:

$$\Gamma=\left\{\omega\in\Omega/4x^2+4\omega x+1\ge 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\omega\in\Omega/16(\omega^2-1)\le 0\right\}=\left\{\omega\in\Omega/-1\le\omega\le 1\right\}=\left\{\omega_1,\omega_2\right\}$$

$$P(\Gamma)=P(\omega_1)+P(\omega_2)=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$$

Για το ενδεχόμενο Α-Β είναι:

$$A-B=\left\{\omega_1\right\}$$

$$P(A-B)=P(\omega_1)=\frac{1}{6}$$

Δ2 .Έχουμε $\lambda=\varepsilon\varphi 45^0=1=f'(x_0)$ όπου $A(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, x\in\mathbb{R}$

Άρα $f'(x_0)=\dfrac{1-{x_0}^2}{(1+{x_0}^2)^2}=1\Leftrightarrow 3{x_0}^2+{x_0}^4=0\Leftrightarrow x_0=0, f(0)=1$.

Άρα το σημείο επαφής είναι το $A(0,1)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α είναι Q

$y=\lambda x+\beta$

$y=x+\beta$

και αφού διέρχεται από το Α θα είναι :

$\beta=1$

$y=x+1$

Δ3. Οι παρατηρήσεις διατεταγμένες κατά αύξουσα σειρά είναι : $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$ και επειδή το πλήθος είναι άρτιο (4) θα είναι $\delta_{\omega_\kappa}=\dfrac{\omega_2+\omega_3}{2}$. Ακόμα, οι τετεγμένες των σημείων Μκ , διατεταγμένες κατά αύξουσα σειρά είναι $\omega_1+1, \omega_2+1, \omega_3+1, \omega_4+1$ και άρα :

$$\delta_{y_k}=\frac{\omega_2+1+\omega_3+1}{2}=\frac{\omega_2+\omega_3+2}{2}$$

Έχουμε διαδοχικά από τις δεδομένες σχέσεις:

$$2\delta_{\omega_k}=\delta_{y_k}\Leftrightarrow 2\frac{\omega_2+\omega_3}{2}=\frac{\omega_2+\omega_3+2}{2}\Leftrightarrow \omega_2+\omega_3=2\Leftrightarrow \omega_3=2$$

$$R_{y_k}=\omega_4-\omega_1=5\Leftrightarrow \omega_4+1=5\Leftrightarrow \omega_4=4$$