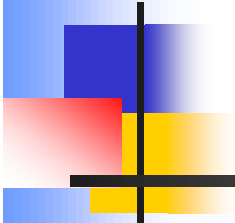


Η ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΟΙ ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

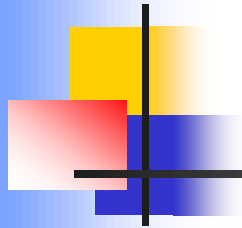


ΑΤΜΑΤΖΙΔΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Μ.Ε

email:atmatzidis@sch.gr

Διεύθυνση δικτυακού τόπου

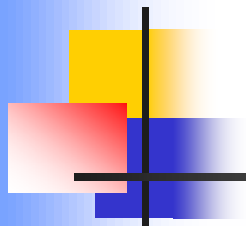
users.sch.gr/atmatzidis



Η ΑΡΧΗ

Όλα ξεκίνησαν όταν μαθητές της
Γ' Λυκείου Κατεύθυνσης με ρώτησαν
με πόσους τρόπους μπορούν να λύσουν
ανισοτικές σχέσεις με την βοήθεια
συναρτήσεων

Η ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΟΙ ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ



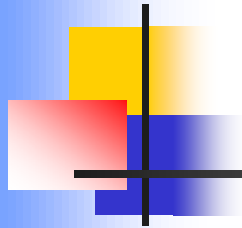
- Η πρώτη συστηματική επαφή των μαθητών με τις ανισοτικές σχέσεις γίνεται στην Άλγεβρα της Α' Λυκείου.
- Υπάρχει πάντα βέβαια η δεδομένη δυσκολία των μαθητών στο χειρισμό ανισοτήτων.



Όμως

Στην Γ' Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης οι μαθητές πρέπει να μάθουν να αντιμετωπίζουν τις ανισοτικές σχέσεις μέσα από την Ανάλυση.

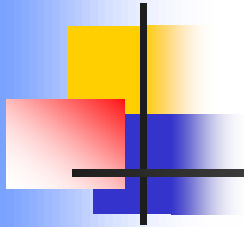
Εδώ ακριβώς πρέπει να μάθουν να χρησιμοποιούν τις συναρτήσεις για βοήθεια.



ΣΤΟΧΟΙ

- Να βρεθούν μέσα στα σχολικά βιβλία οι διάφορες μορφές ανισοτικών σχέσεων.
- Να προταθούν τρόποι επίλυσης και να ομαδοποιηθούν όσο είναι δυνατόν.
- Να δοθούν παραδείγματα για κάθε περίπτωση.

Η ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΟΙ ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ



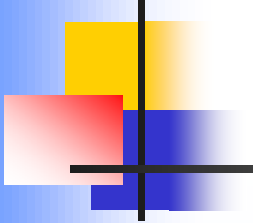
Τα παραδείγματα όλα είναι :

- από το βιβλίο Ανάλυση 1ης Δέσμης, έκδοση Ο.Ε.Δ.Β. (1992-1998)
- από το βιβλίο Μαθηματικά Θετικής κατεύθυνσης, έκδοση Ο.Ε.Δ.Β.(1999 - 2006)
- από το βιβλίο Αξιολόγηση των μαθητών της Γ' Λυκείου στα Μαθηματικά ,Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας .
- και από τα θέματα των πανελλαδικών εξετάσεων 1ης , 4ης Δέσμης και Θετικής - Τεχνολογικής κατεύθυνσης.



$$5+1$$

Υπάρχουν συνήθως πέντε περιπτώσεις που χρησιμοποιούμε τη βοηθητική συνάρτηση για την απόδειξη ανισοτικών σχέσεων και μια έκτη που από ανισότητα αποδεικνύουμε μια ισότητα .



“Η φράση τα πάμε μπροστά και ορίσουμε συνάρτηση”

Μια συνάρτηση ορίζεται ως βοηθητική
σε ένα πρόβλημα όχι για να δυσκολέψει
τη λύση του,

αλλά για να κάνει το πρόβλημα πιο
εύκολο.

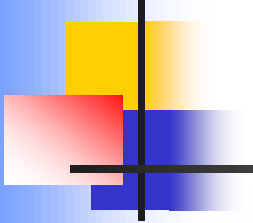
ΜΕΘΟΔΟΣ 1.

Ανισότητες που αποδεικνύονται με την μονοτονία της βοηθητικής συνάρτησης.

Μια συνάρτηση f λέγεται :

- **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε x_1, x_2 που ανήκουν στο Δ με $x_1 < x_2$ ισχύει : $f(x_1) < f(x_2)$.
- **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε x_1, x_2 που ανήκουν στο Δ με $x_1 < x_2$ ισχύει : $f(x_1) > f(x_2)$.

Εκμεταλλευόμαστε την απόδειξη της μονοτονίας με παράγωγο και χρησιμοποιώντας τις ανισότητες του ορισμού για να αποδείξουμε ανισοτικές σχέσεις



Εφαρμογή 1η (Θέμα Δ' Δέσμης 1999)

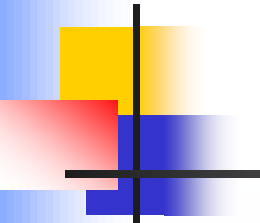
Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0, +\infty)$

$$\ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5}$$

Υπόδειξη : *Ορίζουμε βοηθητική συνάρτηση*

$$g(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{5} \quad g'(x) > 0 \quad g(x) \nearrow$$

$$x > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > \frac{1}{5} > 0$$



Εφαρμογή 2η (Θέμα Α' Δέσμης 1999)

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ και $t \in [1,4]$

$$e^{\frac{1}{x^2}} \leq e^{\frac{t}{x^2}} \leq e^{\frac{4}{x^2}}$$

Υπόδειξη : *Ορίζουμε βοηθητική συνάρτηση*

$$h(t) = e^{\frac{t}{x^2}} \quad 1 \leq t \leq 4 \Leftrightarrow h(1) \leq h(t) \leq h(4)$$

Εφαρμογή 3η

Αξιολόγηση των μαθητών της Γ' Λυκείου στα Μαθηματικά

Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας

Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[0,6]$.
Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f περνά από το σημείο $A(0,1)$ και ισχύει $f'(x) > x$ για κάθε $x \in [0,6]$, να δείξετε ότι :

- α) Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,6]$.
- β) Είναι $g(x) > 0$, για κάθε $x \in [0,6]$.
- γ) Το σημείο $B(6,8)$ δεν ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

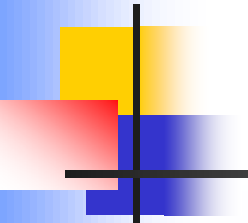
ΜΕΘΟΔΟΣ 2.

Ανισότητες που αποδεικνύονται χρησιμοποιώντας τα ακρότατα βοηθητικής συνάρτησης.

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.
- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Εκμεταλλευόμαστε την εύρεση των ακρότατων με παράγωγο και την ανισότητα του ορισμού για να αποδείξουμε ανισοτικές σχέσεις



Εφαρμογή 1η (από το βιβλίο Ανάλυση 1ης Δέσμης, έκδοση Ο.Ε.Δ.Β).

Ναδειχθείότι γιακάθε $x > 0$

$$2\sqrt{x} + \frac{1}{x} \geq 3$$

Υπόδειξη : *Ορίζουμε βοηθητική συνάρτηση*

$$g(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} - 3 \quad g(1) = 0 \quad \text{ολ.ελαχ}$$

$$x > 0 \Rightarrow g(x) \geq g(1) \Rightarrow 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 3 \geq 0 \Rightarrow 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} \geq 3$$

Εφαρμογή 2η (από το βιβλίο *Ανάλυση*
1ης Δέσμης, έκδοση Ο.Ε.Δ.Β).

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας
της συνάρτησης για κάθε $x > 0$

$$f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$
ισχύει

$$x^x \geq e^{x-1}$$

Εφαρμογή 3η

Αξιολόγηση των μαθητών της Γ' Λυκείου στα Μαθηματικά

Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \text{και} \quad g(x) = 2x + f(x)$$

α) Να αποδείξετε ότι

$$\ln x < x, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

β) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 3.

Ασκήσεις στις οποίες χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής της βοηθητικής συνάρτησης για να αποδείξουμε την ανισότητα που συνήθως είναι διπλή.

Αν μια συνάρτηση είναι :

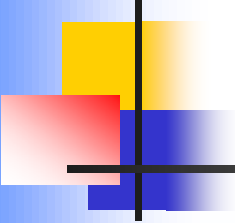
- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και
 - παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β)
- τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$

Θεωρούμε κατάλληλη βοηθητική συνάρτηση που προκύπτει από μελέτη της ανισότητας ή κάποιας ισοδύναμης

Εκμεταλλευόμαστε την ανισότητα $\xi \in (\alpha, \beta) \Leftrightarrow \alpha < \xi < \beta$ και την μονοτονία της $f'(x)$ για να αποδείξουμε ανισοτικές σχέσεις.

Αν π.χ. αν f' γνησίως αύξουσα $\alpha < \xi < \beta \Leftrightarrow f'(\alpha) < f'(\xi) < f'(\beta)$



Εφαρμογή 1η

(από το βιβλίο Ανάλυση 1ης Δέσμης,
έκδοση Ο.Ε.Δ.Β).

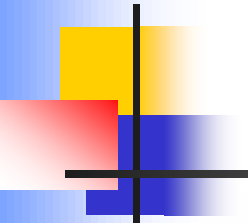
α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση
 $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να αποδειχθεί ότι $2 - \frac{e}{2} < \ln 2 < \frac{2}{e}$

Υπόδειξη Θ.Μ.Τ.

$$\xi \in (2, e): f'(\xi) = \frac{f(e) - f(2)}{e - 2} \Rightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln e - \ln 2}{e - 2}$$

$$2 < \xi < e \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{e} \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{\ln e - \ln 2}{e - 2} > \frac{1}{e} \Rightarrow \dots \Rightarrow 2 - \frac{e}{2} < \ln 2 < \frac{2}{e}$$



Εφαρμογή 2η

(από το βιβλίο Ανάλυση 1ης Δέσμης,
έκδοση Ο.Ε.Δ.Β).

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

$$\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1$$

1^η ανισότητα του John Napier (1550-1617)

Υπόδειξη : Ορίζουμε βοηθητική συνάρτηση $f(x) = \ln x$
Θ.Μ.Τ. στο $[x, 1]$ και $[1, x]$ και $x=1$ ισχύει η ισότητα

Εφαρμογή 3η

Αξιολόγηση των μαθητών της Γ' Λυκείου στα Μαθηματικά

Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας

Να αποδειχθεί ότι

$$\eta\mu(\alpha+h) < \eta\mu\alpha + h \text{ συνα},$$

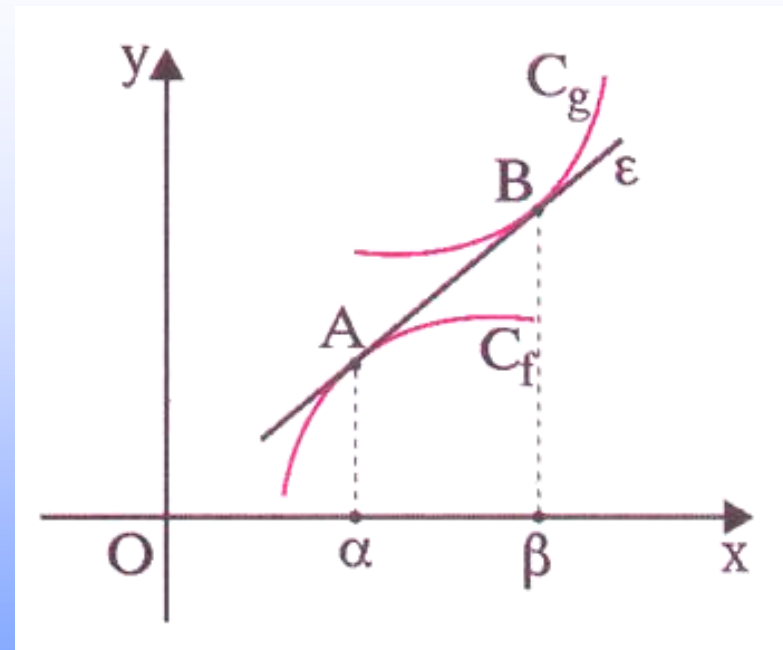
όπου $0 < \alpha < \alpha + h < \frac{\pi}{2}$

Υπόδειξη : Ορίζουμε βοηθητική συνάρτηση
 $f(x) = \eta\mu x$ Θ.Μ.Τ. στο $[a, a+h]$

ΜΕΘΟΔΟΣ 4.

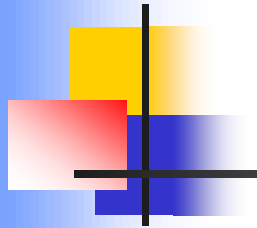
Ασκήσεις στις οποίες χρησιμοποιούμε την κοιλότητα της συνάρτησης σε συνδυασμό με την εξίσωση της εφαπτομένης της για να αποδείξουμε την ανισότητα.

Εκμεταλλευόμαστε τη θέση της εφαπτομένης ως προς τη γραφική παράσταση μιας κυρτής ή κοίλης συνάρτησης για να δείξουμε ανισοτικές σχέσεις



Εφαρμογή 1η

Μαθηματικά θετικής κατεύθυνσης Γ' Λυκείου , Ο.Ε.Δ.Β.

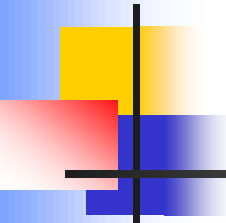


- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι κυρτή.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(0,1)$.
- γ) Να αποδείξετε ότι $e^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Εφαρμογή 2η

Μαθηματικά θετικής κατεύθυνσης
Γ' Λυκείου, Ο.Ε.Δ.Β.

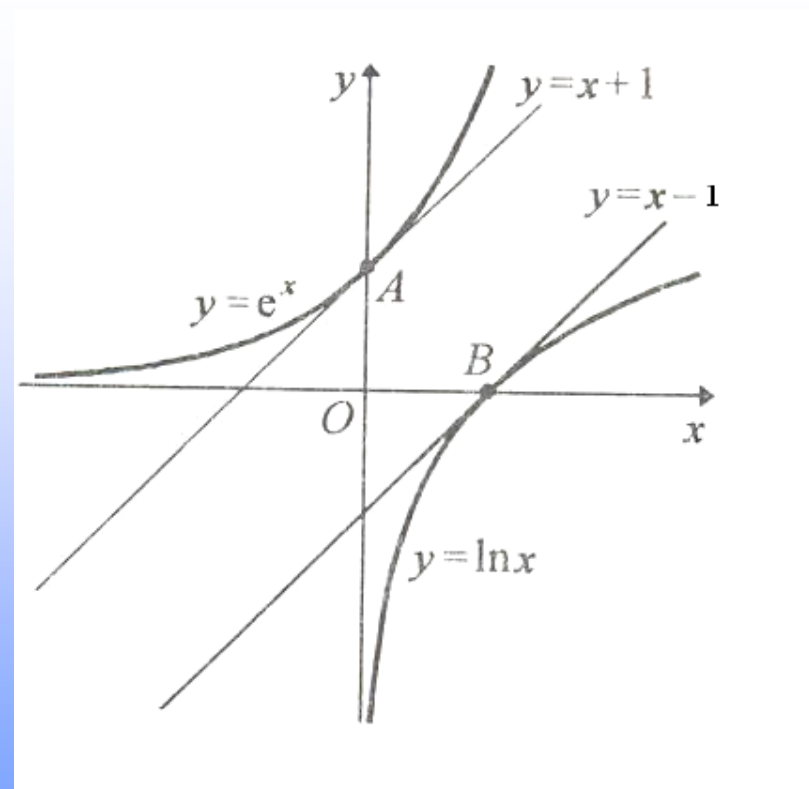
- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln x$ είναι κοίλη.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο $B(1,0)$.
- γ) Να αποδείξετε ότι $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$.



Μια εικόνα χίλιες λέξεις

Εξισ. εφαπτ. $y=x+1$
 f κυρτή για κάθε $x \in \mathbb{R}$
άρα $e^x \geq x+1$

Εξισ. εφαπτ. $y=x-1$
 g κοίλη για κάθε $x > 0$
άρα $\ln x \leq x-1$



ΜΕΘΟΔΟΣ 5.

Ασκήσεις στις οποίες χρησιμοποιούμε την
βασική ανισοτική σχέση.

Εκμεταλλευόμαστε την βασική ανισότητα
από τα ορισμένα ολοκληρώματα για να
αποδείξουμε ανισοτικές σχέσεις

$$\text{Αν } f(x) \geq 0, \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot dx \geq 0$$

Εφαρμογή 1η

Μαθηματικά θετικής κατεύθυνσης Γ' Λυκείου, Ο.Ε.Δ.Β.
και θέμα εξετάσεων θετικής και τεχνολογικής
κατεύθυνσης Γ' Λυκείου, **30 Μαΐου 2002**, το ερώτημα i

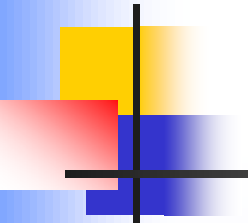
Έστω f, g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο $[a, \beta]$. Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε x που ανήκει στο $[a, \beta]$, τότε

$$\int_a^\beta f(x) \cdot dx \geq \int_a^\beta g(x) \cdot dx$$

ii) Αν m η ελάχιστη και M μέγιστη τιμή της f στο $[a, \beta]$, τότε

$$m(\beta - \alpha) \leq \int_a^\beta f(x) \cdot dx \leq M(\beta - \alpha)$$



Εφαρμογή 2η

(από το βιβλίο *Ανάλυση 1ης Δέσμης*,
έκδοση Ο.Ε.Δ.Β).

Να αποδείξετε ότι :

$$1 - e \leq \int_0^1 e^{x^2} \cdot dx + \int_1^0 e^{1-x^2} \cdot dx \leq e - 1$$

Υπόδειξη : *Ορίζουμε βοηθητική συνάρτηση*

$$f(x) = e^{x^2} - e^{1-x^2}$$

$$f(x) \nearrow$$

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f(0) \cdot dx \leq \int_0^1 f(x) \cdot dx \leq \int_0^1 f(1) \cdot dx$$

Εφαρμογή 3η

(Θέμα πανελλαδικών εξετάσεων Δ'
Δέσμης 1989)

Να αποδειχθεί ότι :

- α) η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα
- β) για $k \geq 1$:

$$\sqrt{k} \leq \int_k^{k+1} \sqrt{x} \cdot dx \quad \text{και} \quad \int_{k-1}^k \sqrt{x} \cdot dx \leq \sqrt{k}$$

Εφαρμογή 4η **ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΟ ΘΕΜΑ**
(Θέμα εξετάσεων Θετικής και Τεχνολογικής
κατεύθυνσης Γ' Λυκείου, **30 Μαΐου 2002.**)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , που ικανοποιεί τις σχέσεις :

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 0.$$

i) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f .

ii) Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$

$$\frac{x}{2} < f(x) < x \cdot f'(x) \quad \text{Μέθ.3 Θ.Μ.Τ. ή Μέθ.1 MONOTONIA}$$

iii) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι

$$\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1) \quad \text{Μέθοδος 5}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ 6. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

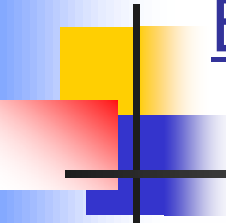
Ασκήσεις στις οποίες χρησιμοποιούμε βοηθητική συνάρτηση και το Θεώρημα Fermat ώστε από ανισότητα να καταλήξουμε συνήθως σε ισότητα

Εκμεταλλευόμαστε την ανισο-ισότητα της υπόθεσης ,
την ανισο-ισότητα του ορισμού των ακρότατων και
την ισότητα του θεωρήματος του Fermat
για να αποδείξουμε συνήθως ισότητες.

Εφαρμογή 1η (Μαθηματικά θετικής
κατεύθυνσης Γ' Λυκείου, Ο.Ε.Δ.Β.)

α) Αν $a, \beta > 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει,
$$a^x + \beta^x \geq 2 \quad \text{να αποδείξετε ότι } a\beta = 1$$

β)) Αν $a > 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει,
$$a^x \geq x + 1 \quad \text{να αποδείξετε ότι } a = e$$



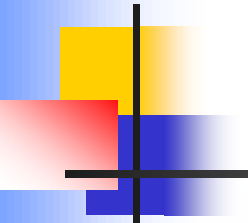
Εφαρμογή 1η (Μαθηματικά θετικής κατεύθυνσης Γ' Λυκείου, Ο.Ε.Δ.Β.)

α) Αν $a, \beta > 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει, $\alpha^x + \beta^x \geq 2$
να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = 1$

Υπόδειξη $f(x) = a^x + \beta^x - 2$ $f(0) = 0$ και $f(x) \geq f(0)$ ο.λ
Θ. Fermat άρα $f'(0) = 0 \Rightarrow \alpha^0 \ln \alpha + \beta^0 \ln \beta = 0 \Rightarrow \ln \alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha\beta = 1$

β)) Αν $a > 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει, $a^x \geq x + 1$
να αποδείξετε ότι $a = e$

Υπόδειξη $f(x) = a^x - x - 1$



Εφαρμογή 2η

(Θέμα των πανελλαδικών εξετάσεων 1ης Δέσμης 2001)

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(0) = 1$ και τέτοια ώστε να ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\int_0^x f(t)dt \geq x \cdot e^{-x}$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$

Υπόδειξη : Ορίζουμε βοηθητική συνάρτηση

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt - xe^{-x} \quad F(x) \geq F(0) \quad F'(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 1$$

Εφαρμογή 3η

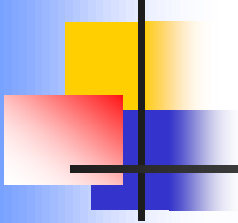
Αξιολόγηση των μαθητών της Γ' Λυκείου στα Μαθηματικά

Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας

Έστω ότι $x^a \geq a^x$ ($a > 0$), για κάθε $x > 0$.
Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Fermat,
να αποδείξετε ότι $a = e$.

Υπόδειξη : Ορίζουμε βοηθητική συνάρτηση

$$f(x) = x^a - a^x$$



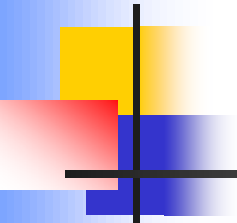
12 ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ και ακολούθως να αποδείξετε ότι $e^{\sqrt{\pi}} < \pi^{\sqrt{e}}$ (Μέθοδος 1)

2. Για κάθε $x > 0$ να αποδείξετε ότι $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ (Μέθοδος 1)

3.α) Να βρείτε το διάστημα $\Delta \subseteq (0, +\infty)$ για το οποίο ισχύει $x^{x+1} > (x+1)^x$ για κάθε $x \in \Delta$

β) Να αποδείξετε ότι $\left(1 + \frac{1}{e}\right)^e < e$



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\ln(1+x^2) \leq x^2$

(Μέθοδος 2)

5. Να αποδειχθεί ότι $e^x \geq x^e$ για κάθε $x > 0$

(Μέθοδος 2)

6. α) Να αποδείξετε ότι για κάθε ισχύει

$$e^x + e^{2x} + e^{-3x} \geq 3$$

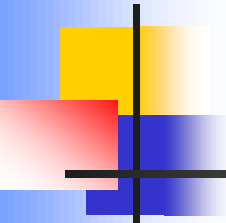
(Μέθοδος 2)

β) Αν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_\nu$ είναι θετικοί αριθμοί και για κάθε

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{ισχύει} \quad \alpha_1^x + \alpha_2^x + \dots + \alpha_\nu^x \geq \nu \quad (\nu \in \mathbb{N}, \nu \neq 0)$$

να αποδείξετε ότι $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_\nu = 1$

(Μέθοδος 6)



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

7. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x > 0$, είναι

$$\frac{1}{x+1} < \ln \frac{x+1}{x} < \frac{1}{x}$$

(Μέθοδος 3)

2η ανισότητα του John Napier (1550-1617)

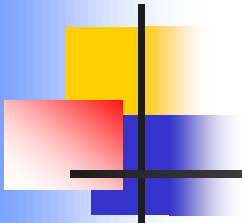
8. Αν $0 < \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι

$$\alpha \cdot e < \left(\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}} < \beta \cdot e$$

(Μέθοδος 3)

9. Αν $1 \leq \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι $\frac{\beta^\nu - \alpha^\nu}{\nu} < \frac{\beta^{\nu+1} - \alpha^{\nu+1}}{\alpha+1}$,
για κάθε $\nu \in \mathbb{N}, \nu \neq 0$ (υποδ. $x^{\nu-1} < x^\nu$)

(Μέθοδος 5)



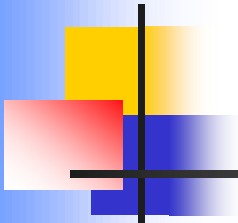
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

10. Να αποδείξετε ότι $\frac{\pi}{15} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\eta\mu x} \leq \frac{\pi}{12}$ (Μέθοδος 5)

11. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχή συνάρτηση με $\int_2^x f(t) \cdot dt \geq x^2 - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρεθεί η τιμή της f στο σημείο $x_0 = 2$

(Μέθοδος 6)



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

12. α) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $xe^x \geq e^x - 1$

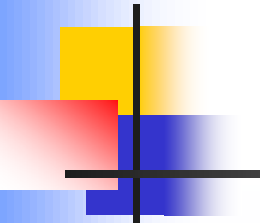
(Μέθοδος 2)

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = xe^x - 3e^x + x^2$

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$

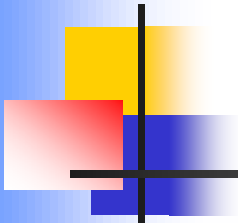
ii) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + 2x \geq -3$

(Μέθοδος 4)



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

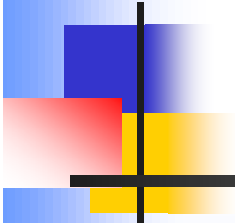
- Κατσαργύρης Β.Μέντης Κ. Παντελίδης Γ.Σούρλας Κ.
Μαθηματικά Γ' Λυκείου Ανάλυση, έκδοση Ο.Ε.Δ.Β.(1992-1999)
- Ανδρεαδάκης Σ. Κατσαργύρης Β.Μέτης Σ. Μπρουχούτας Κ
Παπασταυρίδης Σ. Πολύζος Γ.
Μαθηματικά Γ' ενιαίου Λυκείου θετική Κατεύθυνση έκδοση
Ο.Ε.Δ.Β.(1999- 2002).
- *Αξιολόγηση των μαθητών της Γ' Λυκείου στα Μαθηματικά
Θετικής Κατεύθυνσης*
Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας (Αθήνα 2000).
- Θέματα των πανελλαδικών εξετάσεων 1ης , 4ης Δέσμης και
Θετικής - Τεχνολογικής κατεύθυνσης Γ' Ενιαίου Λυκείου .



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Γιαννακόπουλος Σπ. *Γενικά θέματα στην Ανάλυση* περιοδικό Ευκλείδης Β' (τεύχος 44) Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία
- Ξένος Θ. *Ανάλυση Α' Δέσμης Διαφορικός 2 –Ολοκληρωτικός 3 λογισμός*. Εκδόσεις Ζήτη (Θεσσαλονίκη).
- Ξένος Θ. *Γενικά θέματα μαθηματικών Ανάλυση 1ης Δέσμης* . Εκδόσεις Ζήτη (Θεσσαλονίκη).
- Στεργίου Χαρ.- Νάκης Χρ. - Στεργίου Ιωαν *Μαθηματικά Γ' Λυκείου Ανάλυση2* Εκδόσεις Σαββάλας
- Μπάρλας Αναστάσιος *Μαθηματικά Γ' Ενιαίου Λυκείου*, Εκδόσεις ελληνοεκδοτική
- Κολομητσίνης Σπ, *Επιλογή ασκήσεων(από την διεθνή βιβλιογραφία)Μαθηματικά Γ' Ενιαίου Λυκείου*, Εκδόσεις ελληνικά γράμματα

Η ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΟΙ ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ



ΑΤΜΑΤΖΙΔΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Μ.Ε

email: atmatzidis@sch.gr

Διεύθυνση δικτυακού τόπου

users.sch.gr/atmatzidis