

## **Η ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΟΙ ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ**

**ΣΥΝΕΔΡΙΟ Ε.Μ.Ε. ΤΕΤΑΡΤΗ 7 – 2 – 2007**

**ΑΤΜΑΤΖΙΔΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Μ.Ε.**

Όλα ξεκίνησαν όταν μαθητές της Γ' Λυκείου Κατεύθυνσης με ρώτησαν με πόσους τρόπους μπορούν να λύσουν ανισοτικές σχέσεις με την βοήθεια συναρτήσεων

Η πρώτη συστηματική επαφή των μαθητών με τις ανισοτικές σχέσεις γίνεται στην Άλγεβρας της Α' Λυκείου. Υπάρχει πάντα βέβαια η δεδομένη δυσκολία των μαθητών στο χειρισμό ανισοτήτων.

Στην Γ' Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης οι μαθητές πρέπει να μάθουν να αντιμετωπίζουν τις ανισοτικές σχέσεις μέσα από την Ανάλυση. Εδώ ακριβώς πρέπει να μάθουν να χρησιμοποιούν τις συναρτήσεις για βοήθεια.

### **ΣΤΟΧΟΙ**

- Να βρεθούν μέσα στα σχολικά βιβλία οι διάφορες μορφές ανισοτικών σχέσεων.
- Να προταθούν τρόποι επίλυσης και να ομαδοποιηθούν όσο είναι δυνατόν.
- Να δοθούν παραδείγματα για κάθε περίπτωση.

**Τα παραδείγματα όλα είναι :**

- από το βιβλίο Ανάλυση 1<sup>ης</sup> Δέσμης, έκδοση Ο.Ε.Δ.Β. (1992-1998)
- από το βιβλίο Μαθηματικά Θετικής κατεύθυνσης, έκδοση Ο.Ε.Δ.Β.(1999)
- από το βιβλίο Αξιολόγηση των μαθητών της Γ' Λυκείου στα Μαθηματικά, Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας .
- και από τα θέματα των πανελλαδικών εξετάσεων 1<sup>ης</sup> , 4<sup>ης</sup> Δέσμης και Θετικής - Τεχνολογικής κατεύθυνσης.

**Η φράση τα πάμε μπροστά και ορίσουμε συνάρτηση**

Μια συνάρτηση ορίζεται ως βοηθητική σε ένα πρόβλημα όχι για να δυσκολέψει τη λύση του, αλλά για να κάνει το πρόβλημα πιο εύκολο.

Υπάρχουν συνήθως πέντε περιπτώσεις που χρησιμοποιούμε τη βοηθητική συνάρτηση για την απόδειξη ανισοτικών σχέσεων και μια έκτη που από ανισότητα αποδεικνύουμε μια ισότητα

### ΜΕΘΟΔΟΣ 1.

Ανισότητες που αποδεικνύονται με την μονοτονία της βοηθητικής συνάρτησης.

Είναι γνωστό ότι μια συνάρτηση  $f$  λέγεται :

**γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2$  που ανήκουν στο  $\Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει :  $f(x_1) < f(x_2)$ .

**γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2$  που ανήκουν στο  $\Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει :  $f(x_1) > f(x_2)$ .

Εκμεταλλευόμαστε την απόδειξη της μονοτονίας με παράγωγο και τις ανισότητες του ορισμού για να αποδείξουμε ανισοτικές σχέσεις

Εφαρμογή 1<sup>η</sup> (Θέμα Δ' Δέσμης 1999 )

Να αποδείξετε ότι  $\ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5}$  για κάθε  $x \in [0, +\infty)$

Εφαρμογή 2<sup>η</sup> (Θέμα Α' Δέσμης 1999 )

Να αποδείξετε ότι  $e^{\frac{1}{x^2}} \leq e^{\frac{t}{x^2}} \leq e^{\frac{4}{x^2}}$  για κάθε  $x > 0$  και  $t \in [1,4]$

Εφαρμογή 3<sup>η</sup> (Αξιολόγηση των μαθητών της Γ' Λυκείου στα Μαθηματικά. Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας.)

Έστω  $f$  παραγωγίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $[0,6]$  . Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  περνά από το σημείο  $A(0,1)$  και ισχύει  $f'(x) > x$  για κάθε  $x \in [0,6]$ , να δείξετε ότι :

α) Η συνάρτηση  $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0,6]$ .

β) Είναι  $g(x) > 0$ , για κάθε  $x \in [0,6]$ .

γ) Το σημείο  $B(6,8)$  δεν ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  .

## ΜΕΘΟΔΟΣ 2.

Ανισότητες που αποδεικνύονται χρησιμοποιώντας τα ακρότατα βοηθητικής συνάρτησης.

Είναι γνωστό ότι μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$

Παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) **μέγιστο**, το  $f(x_0)$ , όταν

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A.$$

Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  θα λέμε ότι:

Παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) **ελάχιστο**, το  $f(x_0)$ , όταν

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A.$$

Εκμεταλλευόμαστε την εύρεση των ακροτάτων με παράγωγο και την ανισότητα του ορισμού για να αποδείξουμε ανισοτικές σχέσεις

Εφαρμογή 1<sup>η</sup> (από το βιβλίο Ανάλυση 1<sup>ης</sup> Δέσμης, έκδοση Ο.Ε.Δ.Β.).

Να δειχθεί ότι  $2\sqrt{x} + \frac{1}{x} \geq 3$ , για κάθε  $x > 0$

Εφαρμογή 2<sup>η</sup> (από το βιβλίο Ανάλυση 1<sup>ης</sup> Δέσμης, έκδοση Ο.Ε.Δ.Β.).

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης

$$f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}} \text{ για κάθε } x > 0$$

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $x^x \geq e^{x-1}$

Εφαρμογή 3<sup>η</sup> (Αξιολόγηση των μαθητών της Γ' Λυκείου στα Μαθηματικά . Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας .)

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  και  $g(x) = 2x + f(x)$

α) Να αποδείξετε ότι  $\ln x < x$ , για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ .

β) Να αποδείξετε ότι η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ .

### ΜΕΘΟΔΟΣ 3.

Ασκήσεις στις οποίες χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής της βοηθητικής συνάρτησης για να αποδείξουμε την ανισότητα που συνήθως είναι διπλή.

Γνωρίζουμε ότι αν μια συνάρτηση είναι :

- συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[a, b]$  και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα  $(a, b)$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον,  $\xi \in (a, b)$  τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Θεωρούμε κατάλληλη βοηθητική συνάρτηση που προκύπτει από μελέτη της ανισότητας ή κάποιας ισοδύναμης

Εκμεταλλευόμαστε την ανισότητα  $\xi \in (a, b) \Leftrightarrow a < \xi < b$  και την μονοτονία της  $f'(x)$  για να αποδείξουμε ανισοτικές σχέσεις.

Αν π.χ. αν  $f'$  γνησίως αύξουσα  $a < \xi < b \Leftrightarrow f'(a) < f'(\xi) < f'(b)$

Εφαρμογή 1<sup>η</sup> (από το βιβλίο Ανάλυση 1<sup>ης</sup> Δέσμης, έκδοση Ο.Ε.Δ.Β).

α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση  $f(x) = \ln x$  είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να αποδειχθεί ότι  $2 - \frac{e}{2} < \ln 2 < \frac{2}{e}$

Εφαρμογή 2<sup>η</sup> (από το βιβλίο Ανάλυση 1<sup>ης</sup> Δέσμης, έκδοση Ο.Ε.Δ.Β).

Να αποδείξετε ότι  $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$

**1<sup>η</sup> ανισότητα του John Napier (1550-1617)**

Εφαρμογή 3<sup>η</sup> (Αξιολόγηση των μαθητών της Γ' Λυκείου στα Μαθηματικά . Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας .)

Να αποδειχθεί ότι  $\eta_m(a+h) < \eta_m a + h$  συνα , όπου  $0 < a < a+h < \frac{\pi}{2}$

#### ΜΕΘΟΔΟΣ 4.

Ασκήσεις στις οποίες χρησιμοποιούμε την κοιλότητα της συνάρτησης σε συνδυασμό με την εξίσωση της εφαπτομένης της για να αποδείξουμε την ανισότητα.

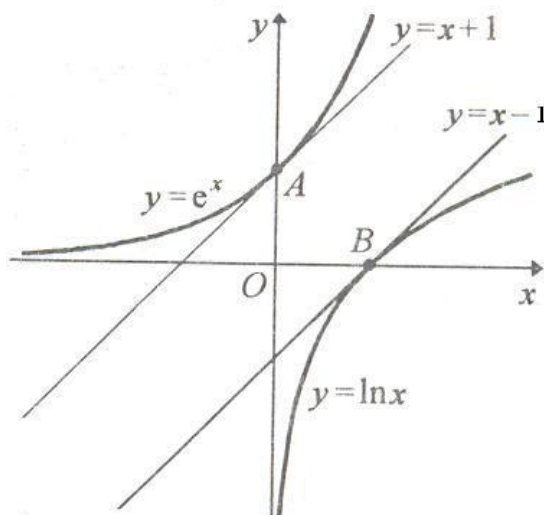
Εκμεταλλευόμαστε τη θέση της εφαπτομένης ως προς τη γραφική παράσταση μιας κυρτής ή κοίλης συνάρτησης για να δείξουμε ανισοτικές σχέσεις

Εφαρμογή 1<sup>η</sup> (Μαθηματικά θετικής κατεύθυνσης Γ' Λυκείου, Ο.Ε.Δ.Β. )

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = e^x$  είναι κυρτή.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο  $A(0,1)$ .
- γ) ) Να αποδείξετε ότι  $e^x \geq x+1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Εφαρμογή 2<sup>η</sup> (Μαθηματικά θετικής κατεύθυνσης Γ' Λυκείου, Ο.Ε.Δ.Β. )

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = \ln x$  είναι κοίλη.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_g$  στο  $B(1,0)$ .
- γ) ) Να αποδείξετε ότι  $\ln x \leq x - 1$  για κάθε  $x > 0$ .



### ΜΕΘΟΔΟΣ 5.

Ασκήσεις στις οποίες χρησιμοποιούμε την βασική ανισοτική σχέση .

$$\text{Αν } f(x) \geq 0, \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot dx \geq 0$$

Εκμεταλλευόμαστε την βασική ανισότητα σχέση για να αποδείξουμε ανισοτικές σχέσεις

Εφαρμογή 1<sup>η</sup> (Μαθηματικά θετικής κατεύθυνσης Γ' Λυκείου, Ο.Ε.Δ.Β. και θέμα εξετάσεων θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης Γ' Λυκείου, **30 Μαΐου 2002**, το ερώτημα i )

Έστω  $f, g$  δύο συναρτήσεις συνεχείς στο  $[a, b]$  . Να αποδείξετε ότι:

i ) Αν  $f(x) \geq g(x)$  για κάθε  $x$  που ανήκει στο  $[a, b]$ , τότε

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \geq \int_a^b g(x) \cdot dx$$

ii) Αν  $m$  η ελάχιστη και  $M$  μέγιστη τιμή της  $f$  στο  $[a, b]$ , τότε

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \cdot dx \leq M(b-a)$$

Εφαρμογή 2<sup>η</sup> (Θέμα πανελλαδικών εξετάσεων Δ' Δέσμης 1989 )

Να αποδειχθεί ότι :

α) η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \sqrt{x}$  είναι γνησίως αύξουσα

β) για  $k \geq 1$ :  $\sqrt{k} \leq \int_k^{k+1} \sqrt{x} \cdot dx$  και  $\int_{k-1}^k \sqrt{x} \cdot dx \leq \sqrt{k}$

Εφαρμογή 3<sup>η</sup> (από το βιβλίο Ανάλυση 1<sup>ης</sup> Δέσμης, έκδοση Ο.Ε.Δ.Β).

$$\text{Να αποδείξετε ότι : } 1 - e \leq \int_0^1 e^{x^2} \cdot dx + \int_1^0 e^{1-x^2} \cdot dx \leq e - 1$$

Εφαρμογή 4<sup>η</sup> ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΟ ΘΕΜΑ **30 Μαΐου 2002**

(Θέμα εξετάσεων Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης Γ' Λυκείου )

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $\mathbb{R}$  συνάρτηση  $f$  , που ικανοποιεί τις σχέσεις :

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0.$$

i) Να εκφραστεί η  $f'$  ως συνάρτηση της  $f$ .

ii) Να δείξετε ότι  $\frac{x}{2} < f(x) < x \cdot f'(x)$ , για κάθε  $x > 0$

iii) Αν  $E$  είναι το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τις ευθείες  $x = 0$ ,  $x = 1$  και τον άξονα  $x'x$ , να δείξετε

$$\text{ότι } \frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1)$$

### ΜΕΘΟΔΟΣ 6. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Ασκήσεις στις οποίες χρησιμοποιούμε βοηθητική συνάρτηση και το Θεώρημα Fermat ώστε από ανισότητα να καταλήξουμε συνήθως σε ισότητα

Εκμεταλλευόμαστε την ανισο-ισότητα της υπόθεσης, την ανισο-ισότητα του ορισμού των ακρότατων και την ισότητα του θεωρήματος του Fermat για να αποδείξουμε συνήθως ισότητες.

Εφαρμογή 1<sup>η</sup> (Μαθηματικά θετικής κατεύθυνσης Γ' Λυκείου, Ο.Ε.Δ.Β. )

α) Αν  $\alpha, \beta > 0$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $\alpha^x + \beta^x \geq 2$ ,

να αποδείξετε ότι  $\alpha\beta=1$

β) ) Αν  $\alpha > 0$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $\alpha^x \geq x+1$ ,

να αποδείξετε ότι  $\alpha = e$

Εφαρμογή 2<sup>η</sup> (Θέμα των πανελλαδικών εξετάσεων 1<sup>ης</sup> Δέσμης 2001)

Έστω συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(0) = 1$  και τέτοια ώστε να ισχύει  $\int_0^x f(t)dt \geq x \cdot e^{-x}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$

Εφαρμογή 3<sup>η</sup> (Αξιολόγηση των μαθητών της Γ' Λυκείου στα Μαθηματικά . Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας .)

Έστω ότι  $x^a \geq a^x$  ( $a > 0$ ), για κάθε  $x > 0$ . Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Fermat, να αποδείξετε ότι  $a = e$ .

## 12 ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

και ακολούθως να αποδείξετε ότι  $e^{\sqrt{\pi}} < \pi^{\sqrt{e}}$  (Μέθοδος 1)

2. Για κάθε  $x > 0$  να αποδείξετε ότι

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x \quad (\text{Μέθοδος 1})$$

3. α) Να βρείτε το διάστημα  $\Delta \subseteq (0, +\infty)$  για το οποίο ισχύει

$$x^{x+1} > (x+1)^x \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

β) Να αποδείξετε ότι  $\left(1 + \frac{1}{e}\right)^e < e$

4. Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι

$$\ln(1+x^2) \leq x^2 \quad (\text{Μέθοδος 2})$$

5. Να αποδειχθεί ότι  $e^x \geq x^e$  για κάθε  $x > 0$  (Μέθοδος 2)

6. α) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει (Μέθοδος 2)

$$e^x + e^{2x} + e^{-3x} \geq 3$$

β) Αν  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  είναι θετικοί αριθμοί και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$\alpha_1^x + \alpha_2^x + \dots + \alpha_n^x \geq n \quad (n \in \mathbb{N}, n \neq 0)$$

να αποδείξετε ότι  $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n = 1$  (Μέθοδος 6)

7. Να αποδειχθεί ότι για κάθε  $x > 0$ , είναι  $\frac{1}{x+1} < \ln \frac{x+1}{x} < \frac{1}{x}$

**2<sup>η</sup> ανισότητα του John Napier (1550-1617)** (Μέθοδος 3)

8. Αν  $0 < \alpha < \beta$ , να αποδείξετε ότι  $\alpha \cdot e < \left(\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}} < \beta \cdot e$  (Μέθοδος 3)

9. Αν  $1 \leq \alpha < \beta$ , να αποδείξετε ότι

$$\frac{\beta^\nu - \alpha^\nu}{\nu} < \frac{\beta^{\nu+1} - \alpha^{\nu+1}}{\alpha + 1}, \quad \text{για κάθε } \nu \in \mathbb{N}, \nu \neq 0$$

(υποδ.  $x^{\nu-1} < x^\nu$ ) (Μέθοδος 5)

10. Να αποδείξετε ότι  $\frac{\pi}{15} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\eta\mu x} \leq \frac{\pi}{12}$  (Μέθοδος 5)

11. Εστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνεχή συνάρτηση με

$$\int_2^x f(t) \cdot dt \geq x^2 - 4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρεθεί η τιμή της  $f$  στο σημείο  $x_0 = 2$  (Μέθοδος 6)

12. α) Δείξτε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $xe^x \geq e^x - 1$  (Μέθοδος 2)

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = xe^x - 3e^x + x^2$

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της  $C_f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$

ii) Δείξτε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) + 2x \geq -3$  (Μέθοδος 4)

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

Κατσαργύρης Β.Μέντης Κ. Παντελίδης Γ.Σούρλας Κ. *Μαθηματικά Γ' Λυκείου Ανάλυση*, έκδοση Ο.Ε.Δ.Β.(1992-1999)

Ανδρεαδάκης Σ. Κατσαργύρης Β.Μέτης Σ. Μπρουχούτας Κ Παπασταυρίδης Σ. Πολύζος Γ. *Μαθηματικά Γ' ενιαίου Λυκείου θετική Κατεύθυνση* έκδοση Ο.Ε.Δ.Β.(1999- 2002).

*Αξιολόγηση των μαθητών της Γ' Λυκείου στα Μαθηματικά Θετικής Κατεύθυνσης* Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας (Αθήνα 2000).

Θέματα των πανελλαδικών εξετάσεων 1<sup>ης</sup> , 4<sup>ης</sup> Δέσμης και Θετικής - Τεχνολογικής κατεύθυνσης Γ' Ενιαίου Λυκείου .

Γιαννακόπουλος Σπ. *Γενικά θέματα στην Ανάλυση* περιοδικό Ευκλείδης Β' (τεύχος 44) Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

Ξένος Θ. *Ανάλυση Α' Δέσμης Διαφορικός 2 –Ολοκληρωτικός 3 λογισμός*. Εκδόσεις Ζήτη (Θεσσαλονίκη ).

Ξένος Θ. *Γενικά θέματα μαθηματικών Ανάλυση 1<sup>ης</sup> Δέσμης* . Εκδόσεις Ζήτη (Θεσσαλονίκη ).

Στεργίου Χαρ.- Νάκης Χρ. - Στεργίου Ιωαν *Μαθηματικά Γ' Λυκείου Ανάλυση2* Εκδόσεις Σαββάλας

Μπάρλας Αναστάσιος *Μαθηματικά Γ' Ενιαίου Λυκείου*, Εκδόσεις ελληνοεκδοτική

Κολομητσίνης Σπ, *Επιλογή ασκήσεων(από την διεθνή βιβλιογραφία )Μαθηματικά Γ' Ενιαίου Λυκείου*, Εκδόσεις ελληνικά γράμματα